

## Бильярды с возмущаемыми границами и некоторые их свойства

А. Ю. Лоскутов<sup>1</sup>, А. Б. Рябов<sup>2</sup>, А. К. Краснова<sup>3</sup>, О. А. Чичигина<sup>4</sup>

<sup>1,3,4</sup> Физический факультет

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119992, Россия, Москва

<sup>2</sup> ICBM

University of Oldenburg  
26111, Germany, Oldenburg

<sup>1</sup> loskutov@chaos.phys.msu.ru, <sup>2</sup> a.ryabov@icbm.de, <sup>3</sup> sasha\_krasnova@yahoo.com, <sup>4</sup> chichigina@ilc.edu.ru

*Получено 27 сентября 2010 г.*

Рассматриваются классические системы статистической механики — бильярды различной геометрии, границы которых возмущаются со временем. Изучена динамика частиц в таких бильярдах и описаны некоторые их статистические свойства. Исследовано ускорение Ферми, возникающее вследствие колебаний границ в бильярдах произвольной формы. Основное внимание уделено анализу газа Лоренца с стохастически осциллирующими рассеивателями и бильярду в форме стадиона с периодически возмущаемой границей. Показано, что в результате ускорения Ферми в газе Лоренца имеет место супердиффузия. Найдено, что когда форма бильярда типа стадион близка к прямоугольной, колебания его границ приводят к новому явлению — разделению частиц по скоростям, когда ансамбль частиц с высокими начальными скоростями в среднем ускоряется, а для частиц с относительно низкими начальными значениями скорости ускорение не наблюдается.

Ключевые слова: бильярды, газ Лоренца, супердиффузия, ускорение Ферми, динамический хаос

**A. Loskutov, A. B. Ryabov, A. K. Krasnova, O. A. Chichigina**  
**Billiards with time-dependent boundaries and some their properties**

Classical systems of statistical mechanics — billiards of different geometry the boundaries of which are perturbed in time — are considered. Dynamics of particles in such billiards and their statistical properties are described. Fermi acceleration which appears in consequence of the boundary oscillations in billiards of arbitrary shapes is investigated. Main attention is given on the analysis of Lorentz gas with stochastically oscillating scatterers and billiards in the form of stadium with periodically perturbed boundary. It is shown that as a result of Fermi acceleration, superdiffusion in the Lorentz gas takes place. It is found that if the shape of the stadium-type billiard is close to rectangular, then the boundary oscillations lead to a new phenomenon — separation of particles by their velocities, when the particle ensemble with high initial velocities is on averaged accelerated, while for particles with relatively low velocities the acceleration is not observed.

Keywords: billiards, Lorentz gas, superdiffusion, Fermi acceleration, dynamical chaos  
MSC 2010: 37D50, 82C05



Исполнилось 60 лет замечательному российскому ученому, воспитаннику колмогоровской школы, академику Валерию Васильевичу Козлову. В своих работах, относящихся к теории неравновесных явлений, он неоднократно подчеркивал важность обоснования классической статистической механики и понимания природы необратимости. Ряд исследований Валерий Васильевич посвятил математическому изучению бильярдов, где в последнее время основной проблематикой является развитие термодинамического анализа.

В настоящей статье мы обобщаем некоторые подходы, развиваемые в работах В. В. Козлова, и рассматриваем бильярды, границы которых осциллируют со временем. Такие бильярды — естественная физическая интерпретация классических математических бильярдов. Их динамика более разнообразна. Например, прямым следствием возмущения границ будет ускорение Ферми, а диффузия в газе Лоренца со стохастически осциллирующими рассеивателями оказывается аномальной, а именно супердиффузией. Кроме того, в некоторых фокусирующих бильярдах колебания границ приводит к новому интересному явлению — разделению частиц по скоростям.

Работа посвящена 60-летию юбилею академика Валерия Васильевича Козлова.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	575
2. Бильярд как динамическая система . . . . .	577
2.1. Рассеивающие бильярды. Газ Лоренца . . . . .	577
2.2. Бильярды с фокусирующими компонентами . . . . .	579
2.3. Бильярды и захват траекторий . . . . .	580
2.4. Бильярд типа стадион . . . . .	581
3. Бильярды с возмущаемыми границами . . . . .	586
3.1. Бильярд произвольной формы . . . . .	586
3.2. Среднее изменение скорости в общем случае . . . . .	589
4. Газ Лоренца с осциллирующими рассеивателями . . . . .	591
4.1. Динамика газа Лоренца в дискретном пространстве . . . . .	592
4.2. Численный анализ . . . . .	594
5. Динамика частиц в фокусирующих бильярдах . . . . .	596
5.1. Бильярд в форме классического стадиона . . . . .	597
5.2. Стадион, близкий к прямоугольнику . . . . .	598
5.3. Разделение частиц по скоростям . . . . .	599
6. Заключительные замечания . . . . .	600

## 1. Введение

Бильярдная динамическая система описывает движение материальной точки в некоторой ограниченной области многообразия с условием упругого отражения от границы по закону «угол падения равен углу отражения». Такие системы в определенном смысле являются ключом к пониманию некоторых вопросов теории динамических систем. Более того, бильярды естественным образом возникают при исследовании многих важных математических и физических задач. Так, множество популярных моделей механики, например газ Лоренца и газ твердых сфер (газ Больцмана), также могут быть представлены бильярдами определенной формы. Системы бильярдного типа служат полезными моделями в акустике, оптике и в некоторых других областях. Кроме того, вопросы, возникающие при изучении бильярдных задач, тесно связаны с эргодической гипотезой Больцмана, и поэтому по сей день они привлекают большой интерес.

Бильярдные модели проявляют очень широкий спектр движения — от полностью упорядоченной динамики до ярко выраженного стохастического поведения. Регулярная динамика характерна для плоских бильярдов с гладкой выпуклой наружу границей. С другой стороны, известен достаточно широкий класс бильярдных систем, которые могут демонстрировать свойство неравномерной гиперболичности. При некоторых дополнительных условиях в таких системах существуют устойчивые и неустойчивые многообразия почти всюду и, следовательно, они естественным образом обобщают (равномерно гиперболические) системы Аносова.

Таким образом, бильярды служат прекрасным инструментом для исследования механизмов стохастичности.

Впервые формальный анализ динамики бильярдного шара был предпринят Г. Кориолисом [1], который теоретически изучил движение шара на плоскости. Позже Ж. Адамар [2] рассмотрел вопрос о движении на закрученной поверхности отрицательной кривизны. Но понятие бильярда в теоретической механике и математической физике возникло после того, как Дж. Биркгоф [3] рассмотрел задачу о движении по инерции материальной точки (бильярдного шара) в некоторой ограниченной области. Некоторое время спустя глубокие работы Н. С. Крылова [4], посвященные проблеме перемешивания в системе из упругих шаров, привели исследователей к необходимости рассмотрения задач бильярдного типа. Однако только с публикаций работ Я. Г. Синая [5] и затем Л. А. Бунимовича [6, 7] (см. также [8]) начались современные исследования бильярдов.

Достаточно общие условия возникновения стохастичности в 2D бильярдах описаны в монографиях [9, 10] (см. также цитированную там литературу). Интересные свойства бильярдных систем представлены в монографии [11]. Термодинамический подход к анализу некоторых бильярдов предложен в работе [12] и монографии [13].

Бильярды, границы которых осциллируют по тому или иному закону, представляют собой естественное физическое обобщение классических бильярдных систем. В самом деле, газ Лоренца был предложен для описания движения электрона среди тяжелых ионов металла. Однако в реальной ситуации ионы должны слабо «дрожать» вблизи своего положения равновесия. Тогда возникает вопрос: к чему приведут осцилляции границ бильярда?

Дело в том, что в таком бильярде частица будет испытывать как встречные, так и сопутствующие столкновения с границей. В первом случае отражение от границы происходит, когда частица и граница движутся навстречу друг другу. Во втором случае столкновения происходят в момент, когда частица и граница движутся в одном направлении. При встречных столкновениях частица «нагревается», т. е. ее скорость возрастает. Сопут-

ствующие столкновения, наоборот, ведут к остыванию частицы, так что она замедляется. Каких столкновений при  $t \rightarrow \infty$  будет больше, т. е. при каких условиях бильярдная частица будет ускоряться/замедляться? Какой в этом случае будет динамика бильярдного шара? Изучение этих вопросов составляет основное содержание данной работы.

Впервые механизм ускорения частиц в результате столкновения с массивными движущимися рассеивателями был предложен Э. Ферми [14] для объяснения происхождения космических лучей высоких энергий. Его идея состояла в том, что заряженные частицы, сталкиваясь с движущимися заряженными облаками в межзвездном пространстве, должны в среднем ускоряться. В самом деле, если рассматривать облако как массивный рассеиватель, то нетрудно понять причину такого ускорения. При случайном распределении скоростей движения число облаков, которые движутся в одном направлении, будет равно числу облаков, движущихся в противоположном направлении. Поэтому частицы преимущественно будут сталкиваться с облаками, движущимися им навстречу, т. е. в среднем они должны приобретать энергию. Так возникает ускорение, называемое ускорением Ферми.

Для объяснения ускорения Ферми в свое время было предложено большое количество различных моделей (см. [15, 16, 17, 18, 19, 20] и приведенные там ссылки). Эти модели в той или иной степени прояснили причину ускорения. Так, для одномерной конфигурации (модель Ферми–Улама), когда частица осциллирует между двумя массивными стенками, одна из которых фиксирована, а другая движется, было показано, что для пилообразной зависимости движения стенки от времени частица будет ускоряться. В случае, однако, гладкой зависимости рост скорости частицы будет ограничен инвариантными кривыми [17, 19]. С другой стороны, для обобщенной модели, когда имеется одна осциллирующая плита в поле тяжести, фаза колебаний частицы в момент столкновения будет случайной величиной. В этом случае частица всегда ускоряется.

В стохастических бильярдах, даже если скорость границы является гладкой функцией времени, угол падения частицы можно рассматривать как случайную величину. Следовательно, нормальная компонента скорости в точке столкновения будет стохастической. На основе подобных рассуждений в работе [21] было выдвинуто предположение (известное сейчас как LRA-conjecture [22, 23, 24, 25]), что ускорение Ферми в неавтономных бильярдах будет наблюдаться, если только соответствующий бильярд с неподвижными (фиксированными) границами обладает стохастической динамикой.

С помощью динамического подхода это предположение было подтверждено для газа Лоренца, заданного на периодической решетке [26], для стадиона Бунимовича [27], для бильярдов с границей кольцевой формы [28] и в форме овала [29]. Недавно в работе [30] на основе теории динамических систем было показано, что ускорение Ферми присуще широкому классу неавтономных бильярдов. Наконец, используя термодинамические методы, авторы [31] показали, что разгон частиц будет наблюдаться в газе Лоренца достаточно общей конфигурации.

Отметим, однако, что данная гипотеза не утверждает, что ускорение Ферми не существует в бильярдных системах, которые при фиксированных границах являются интегрируемыми. Например, известно, что рост скорости наблюдается в бильярдах с возмущаемыми границами в форме эллипса [25, 32], который в статическом случае принадлежит к полностью интегрируемым системам. Дело в том, что в таком бильярде сепаратрисы после возмущения границ пересекаются, образуя стохастический слой, что и приводит к ускорению Ферми. Более того, в работах, где изучались плоские бильярды в полигонах с осциллирующими границами, был обнаружен экспоненциальный рост скорости бильярдной частицы [33].

Однако в целом ситуация оказывается намного сложнее: не для всех начальных скоростей бильярдной частицы может наблюдаться ускорение Ферми. В неавтономных бильярдах с фокусирующими компонентами малой кривизны может наблюдаться расслоение частиц по скоростям: частицы с высокими начальными скоростями ускоряются, а частицы, начальная скорость которых мала, — нет. Это необычное свойство можно интерпретировать как своеобразный демон Максвелла, когда бильярд с возмущаемыми границами словно селектирует частицы с разными скоростями. Впервые этот интересный результат был получен для стадиона Бунимовича [27]. Позже он подробно исследован в работе [34], где найдены условия существования разделения частиц.

Физическая реализация демона Максвелла для бильярдов с неподвижными границами впервые была описана в работе Г. Заславского и М. Эдельмана [35, 36] (см. также [37] и приведенные там ссылки). Авторы рассмотрели два плоских бильярдных стола, связанных небольшим отверстием, и показали, что такая система не достигает равновесного состояния даже спустя очень большой промежуток времени.

В настоящей работе описаны бильярды с возмущаемыми границами различных форм и изучены их некоторые как статистические, так и динамические свойства.

## 2. Бильярд как динамическая система

Пусть  $M$  — евклидова плоскость. Бильярдным столом  $Q$  является некоторая область  $Q \subset M$  с кусочно-гладкой границей  $\partial Q$ . Как правило, граница каждого бильярда состоит из  $m$  компонент  $\partial Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Если для каждой компоненты  $\partial Q_i$  рассмотреть единичные нормали  $n(q)$  в каждой точке  $q \in \partial Q_i$ , направленные внутрь области  $Q$ , то они будут определять кривизну  $\kappa(q)$  кривой  $\partial Q_i$  во всех регулярных точках  $q$ . Компонента  $\partial Q_i$  является рассеивающей, если  $\kappa(q) > 0$ . Для  $\kappa(q) = 0$  и  $\kappa(q) < 0$  получим, соответственно, нейтральную и фокусирующую компоненты границы бильярда. Объединение всех рассеивающих, нейтральных и фокусирующих компонент обозначается, соответственно, как  $\partial Q^+$ ,  $\partial Q^0$  и  $\partial Q^-$ .

Бильярдная динамическая система порождается свободным движением материальной точки (бильярдного шара) в некоторой области  $Q$  с кусочно-гладкой границей  $\partial Q$  и условием упругого отражения от  $\partial Q$ . Если граница в точке соударения гладкая, то бильярдный шар отражается от нее так, что тангенциальная компонента скорости не изменяется, в то время как нормальная составляющая изменяет знак на противоположный. Таким образом, на евклидовой плоскости угол падения будет равен углу отражения. Если шар попадает в угол, его дальнейшее движение не определено.

### 2.1. Рассеивающие бильярды. Газ Лоренца

Бильярд называется рассеивающим, если для любой регулярной точки  $q$  его границы  $\partial Q$  выполняется  $\kappa(q) > 0$ . Динамика частиц в рассеивающих бильярдах подобна геодезическим потокам на римановых многообразиях отрицательной кривизны. Очевидно, роль отрицательной кривизны играют рассеивающие компоненты границы, но, в отличие от геодезических потоков, такие системы являются неравномерно полно гиперболическими.

Основной результат, относящийся к развитию стохастичности в рассеивающих бильярдах, состоит в том, что рассеивающий бильярд является  $K$ -системой и изоморфен схеме Бернулли [8].

Рассмотрим некоторую плоскую область  $Q$  с кусочно-гладкой границей  $\partial Q$ , состоящей из нейтральных  $\partial Q_i^0$  и рассеивающих  $\partial Q_i^+$  (т.е. выпуклых внутрь области  $Q$ ) компонент  $\partial Q$ . Допустим, что бильярдная система задана в неограниченной области  $D$  и состоит из множества круглых бесконечно тяжелых рассеивателей  $B_i$  с границей  $\partial Q_i$  и радиусом  $R$ , расположенных в узлах бесконечной периодической решетки с периодом  $a$  (см. рис. 1 а,б). При условии, что  $B_i$  неподвижны, бильярд в области  $Q = D \setminus \bigcup_{i=1}^r B_i$  называется газом Лоренца.

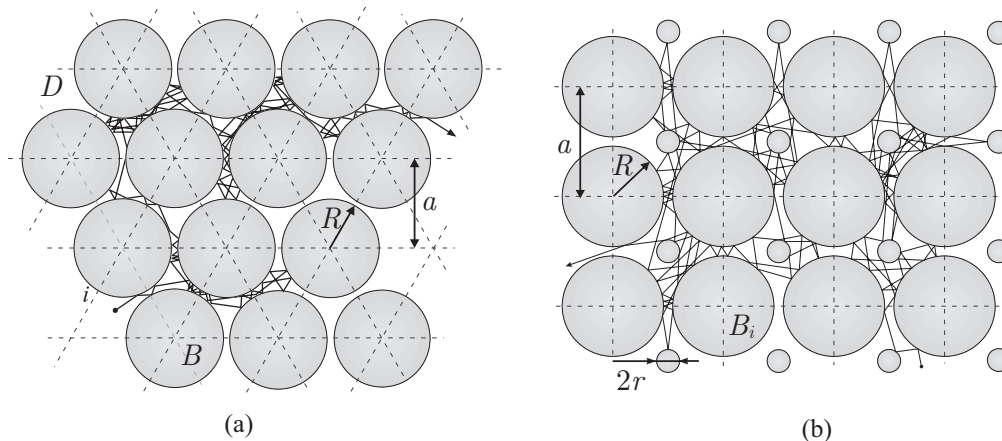


Рис. 1. Газ Лоренца, заданный на треугольной и квадратной решетках.

В зависимости от радиуса  $R$  рассеивателей и шага решетки  $a$  эта модель может демонстрировать качественно различные свойства. Для треугольной решетки, если  $R < a/2$ , то газ Лоренца имеет неограниченный горизонт, так что частица может совершать бесконечно длинные пролеты без столкновения с рассеивателями. Когда  $R \geq a/\sqrt{3}$ , движение частицы будет ограничено одной ячейкой. В этом случае газ Лоренца аналогичен бильярду Синая. Если же  $a/2 \leq R < a/\sqrt{3}$ , то длина свободного пробега частицы ограничена, но для нее оказывается доступной вся область  $D$ . Такая конфигурация называется газом Лоренца с открытым горизонтом.

В дополнение к треугольной геометрии можно рассмотреть периодические бильярды на гексагональной или квадратной решетках. В последнем случае, однако, чтобы избежать бесконечно длинных пролетов, в дополнение к основным рассеивателям необходимо ввести рассеиватели малого радиуса  $r < R$  (рис. 1 б). Тогда конечный горизонт определится соотношением  $R \geq a/2$  (или  $r \geq a/\sqrt{2} - R$ ), а открытый горизонт — неравенством  $a/2 - R < r < a/\sqrt{2} - R$ . Для неограниченного горизонта  $R + r \leq a/2$ . В дополнение к этому, чтобы исключить вероятность диагональных пролетов, необходимо выполнение соотношения  $R > a/(2\sqrt{2})$ .

В случае бесконечного горизонта статистические свойства бильярда меняются и для него наблюдается алгебраическое расщепление корреляций. Однако для отображений, описывающих динамику бильярдной частицы, имеет место экспоненциальный распад корреляций. Например, для автокорреляционной функции векторов скорости  $E(m) = \langle v_n v_{n+m} \rangle$  выполняется следующее соотношение:  $E(m) \leq A \exp(-km^\gamma)$ ,  $1/2 \leq \gamma \leq 1$  [8, 38, 39, 40].

В общем случае средняя длина свободного пробега в бильярдах задается как

$$\lambda = \int_{\Omega} \lambda(x) d\nu(x),$$



где  $\Omega = \{(q, v) \in M : q \in \partial Q \text{ и } (v \cdot n(q)) \geq 0\}$ ,  $n(q)$  — единичный вектор внутренней нормали к границе, а  $v$  — вектор скорости. При этом мера  $d\nu(x) = c_\nu(v \cdot n(q)) dq dv$ , где  $dq$  — мера Лебега на  $\partial Q$ , а  $c_\nu$  — нормировочный множитель. Для конкретных бильярдов величину  $\lambda$  можно определить в виде [39]

$$\lambda = \frac{|Q| |S^{k-1}|}{|\partial Q| |B^{k-1}|},$$

где  $|S^{k-1}| = 2\pi^{k/2} / \Gamma(k/2)$  —  $(k-1)$ -мерный объем единичной сферы в  $\mathbb{R}^k$ ,  $\Gamma(x)$  — гамма-функция и  $|B^{k-1}| = |S^{k-2}| / (k-1)$  — объем единичного шара в  $\mathbb{R}^k$ . В частности, для плоских бильярдов  $l = \pi|Q| / |\partial Q|$  [40].

Для случая неподвижных рассеивателей газ Лоренца был достаточно подробно изучен аналитически [5, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45] и численно [40, 46, 47, 48, 49, 50, 51]. В частности, было показано, что динамика частицы в газе Лоренца обладает эргодичностью, перемешиванием и в определенном смысле подобна броуновской [8].

## 2.2. Бильярды с фокусирующими компонентами

Как известно (см. [6, 7, 52, 53, 54]), механизм возникновения хаоса в бильярдах с границей в форме нейтральных и фокусирующих компонент иной, чем в рассеивающих бильярдах. Сущность этого механизма заключается в следующем. При отражении от фокусирующей компоненты пучок близких траекторий начинает сходиться. Поэтому хаос в такой системе возникает не всегда, а только в том случае, если фокусирующие компоненты расположены достаточно далеко друг от друга и время схождения пучка меньше времени последующего расхождения [38, 52]. Механизм возникновения стохастичности в таких бильярдах называется дефокусирующим. Различные примеры бильярдов такого типа представлены в работах [6, 7]. Простой геометрический анализ фокусирующих бильярдов можно найти в учебнике [55].

Основной смысл результатов, касающихся бильярдов с фокусирующими и рассеивающими компонентами, сводится к следующему. Если

- кривизна каждой компоненты  $\partial Q^-$  постоянна,  $k(q|_{\partial Q^-}) = \text{const}$ ;
- никакие две фокусирующие компоненты не являются дугами одной и той же окружности;
- дуга, дополняющая любую фокусирующую компоненту до полной окружности, лежит внутри области  $Q$ ,

то бильярд в области, граница которой имеет рассеивающие и фокусирующие компоненты, является  $K$ -системой. При этом не накладывается никаких условий на соотношение длин рассеивающих и фокусирующих компонент.

Если любой достаточно малый пучок параллельных лучей, который падает на фокусирующую компоненту, после серии последовательных отражений покидает ее в виде сходящегося пучка, то такая компонента является абсолютно фокусирующей и обозначается  $\Gamma^f$ . Геометрически это означает, что кривизна таких компонент меняется не слишком сильно. В работе [52] приведены общие условия, при выполнении которых компонента границы будет абсолютно фокусирующей. В частности, дуга окружности, а также достаточно малый отрезок любой кривой всегда являются абсолютно фокусирующими.

Каждая серия последовательных отражений от  $\Gamma^f$  определяется начальной точкой  $q_0 \in \Gamma^f$  и углом падения  $\varphi_0$ ,  $-\pi/2 \leq \varphi_0 \leq \pi/2$ . Обозначим через  $\hat{\tau}(q_0, \varphi_0)$  время, в течение которого пучок следовал от места последнего отражения от  $\Gamma^f$  в данной серии до точки фокусировки. Поскольку компонента границы  $\Gamma^f$  является абсолютно фокусирующей, то значение  $\hat{\tau}(q_0, \varphi_0)$  конечно. Более того,

$$\hat{\tau}(\Gamma^f) = \sup_{\substack{q_0 \in \Gamma^f \\ -\pi/2 \leq \varphi_0 \leq \pi/2}} \hat{\tau}(q_0, \varphi_0) < \infty.$$

Тогда справедлив следующий точный результат. Бильярд в ограниченной области  $Q$  является перемешивающим при выполнении следующих условий [38]:

- а)  $\partial Q^+ \cup \partial Q^- \neq \emptyset$ ;
- б) все фокусирующие компоненты являются абсолютно фокусирующими;
- в)  $\tau_Q(\partial Q^-) > 2 \max_{1 \leq i \leq m} \hat{\tau}(\Gamma_i^f)$ , где  $\bigcup_{i=1}^m \Gamma_i^f = \partial Q^-$ ;
- г) нейтральные компоненты границы не пересекаются друг с другом;
- д) рассеивающие компоненты трансверсально пересекаются друг с другом и с нейтральными компонентами.

Отметим, что требования г) и д) можно опустить. Условия б) и в) наиболее важные, поскольку они дают достаточные условия возникновения стохастичности в двумерных бильярдах.

С другой стороны, если фокусирующая компонента  $\Gamma^f$  не является абсолютно фокусирующей, то существует семейство областей  $Q$ , такое, что  $\Gamma^f \subset \partial Q$  для каждого  $Q$  из этого семейства и бильярд в  $Q$  имеет устойчивую периодическую траекторию. Следовательно, бильярды такого типа не являются эргодическими и имеют острова устойчивости. Такая картина типична для гамильтоновых систем общего вида, которые, как известно, в общем случае не интегрируемы и не хаотичны [56]. В фазовом пространстве таких систем иерархия КАМ-островов устойчивости сосуществует со стохастическим слоем, который сформирован одной или несколькими эргодическими компонентами (см. [37, 57]). Это, в частности, означает, что в целом регулярная и стохастическая динамика тесно переплетены.

### 2.3. Бильярды и захват траекторий

Разделенное фазовое пространство приводит к довольно неожиданному эффекту залипания (stickiness) или захвата [58], который заключается в том, что хаотическая траектория, попадая в малую окрестность КАМ-островов, может оставаться там достаточно долго.

Когда траектория находится в стохастической области вдали от множества КАМ-торов, она будет двигаться случайным образом. Однако если траектория попадает в область вблизи такого множества, то она оказывается захваченной в окрестность этого множества. В результате какое-то время система будет вести себя регулярно. При этом экспоненциальное расщепление корреляций, которое было присуще системе до захвата в область вблизи КАМ-торов, сменяется расщеплением степенного типа [59]. Следовательно, такой процесс существенно отражается также и на статистических свойствах систем.

Таким образом, в целом гамильтонова система с разделенным фазовым пространством проявляет перемежающийся динамический режим: вслед за хаотическим поведением в течение продолжительного времени наблюдается почти регулярная динамика. Захват в окрестность КАМ-торов может происходить произвольно долгое, но конечное время, что препят-



ствует релаксации системы к равномерному распределению. По истечении этого периода времени система вновь «обретает» хаотические свойства. И так далее.

Явление захвата называют динамическим охлаждением траекторий, или стиранием хаоса. Оно наблюдалось в достаточно широком спектре гамильтоновых систем физического происхождения [37]. Однако в общем случае неизвестно, будет ли наблюдаться захват в системах, где существует конечное или бесконечное число КАМ-островков [58].

Недавно в работе [60] было построено довольно любопытное и весьма наглядное семейство гамильтоновых систем, в которых существуют четко разделенные единственный КАМ-островок и единственная эргодическая хаотическая компонента. Такую динамику демонстрирует семейство бильярдов с границей в форме идеализированного «гриба», которая состоит из полукруга  $S$  и прямоугольного основания  $\Pi$  (рис. 2). В конфигурационном пространстве такого бильярда границу между эргодической и регулярной компонентами образуют траектории, находящиеся в полукруге  $S$ , которые касаются окружности с радиуса  $r$ . При этом, как легко видеть (рис. 2), регулярная область состоит из траекторий, которые не пересекают эту окружность, оставаясь в полукруге  $S$  и не попадая в основание  $\Pi$ . Однако хаотические орбиты всегда с необходимостью посещают основание бильярда.

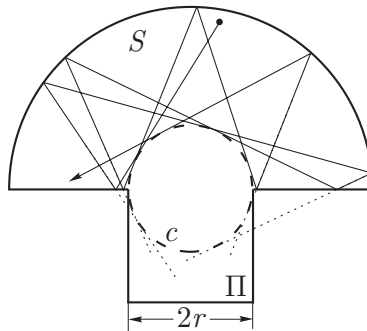


Рис. 2. Бильярд с границей в форме гриба.

На примере таких бильярдов недавно было обнаружено [61], что для наблюдения динамического охлаждения хаотической траектории вовсе не обязательно существование иерархии островков стабильности. Более того, в данном бильярде этот процесс происходит благодаря наличию бесконечного множества нулевой меры неустойчивых периодических траекторий, существующих в стохастической области. Иными словами, множества нулевой меры могут оказывать существенное влияние на поведение системы в целом.

Этот результат представляется весьма неожиданным, поскольку с точки зрения динамики всегда считалось, что такие множества не должны приниматься в расчет и их существованием можно пренебречь. Конечно, поскольку мера таких множеств нулевая, асимптотически они не влияют на эргодичность динамической системы. Тем не менее, захват траекторий вблизи границы регулярной области происходит именно благодаря их существованию.

#### 2.4. Бильярд типа стадион

Рассмотрим бильярд типа стадион, граница которого состоит из дуг двух окружностей и двух параллельных отрезков длины  $l$ , соединяющих концы этих дуг (рис. 3). Для такого бильярда условие существования стохастичности, описанное в предыдущем пункте, приобретает простой вид. Именно, пусть  $Q \subset R^2$ , а компонента  $\Gamma^f$  является частью окруж-

ности  $C$ . Условие стохастичности выполнено, если диск  $D$ ,  $\partial D = C$ , принадлежит области  $Q$  (см. [6, 7]).

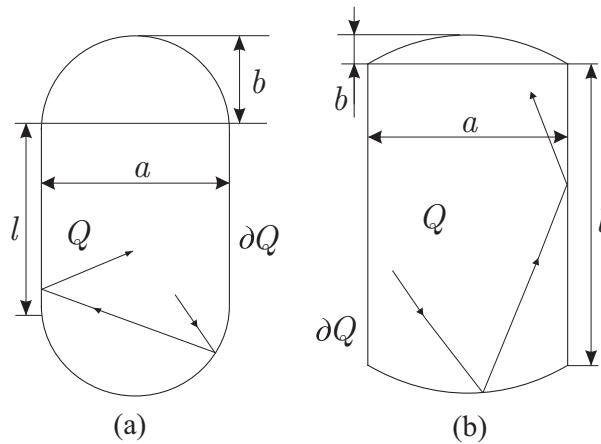


Рис. 3. Бильярды типа стадион.

Используя качественные рассуждения, нетрудно провести анализ динамики частиц в таком бильярде. Если фокусирующая компонента бильярда изогнута не сильно (параметр  $b$  относительно мал, рис. 3 б), то бильярд теряет  $K$ -свойство и становится системой, близкой к интегрируемой. При этом неподвижные точки обретают устойчивость, в результате чего в стохастическом море образуются островки стабильности, где движение регулярно. Вместе с тем, из-за слабой нелинейности системы динамика в окрестности сепаратрис, разделяющих области устойчивости разных эллиптических точек, остается стохастической и частица, попавшей в эту область, становится доступной достаточно большая часть фазового пространства.

Рассмотрим бильярд, изображенный на рисунке 4, у которого в качестве фокусирующих компонент использованы дуги окружностей радиуса  $R$  и угловой меры  $2\Phi$ . Из геометрических соображений вытекают следующие соотношения с другими параметрами бильярда:

$$R = \frac{a^2 + 4b^2}{8b}, \quad \Psi = \arcsin \frac{a}{2R}.$$

Если выполнено неравенство  $b \ll l$ , то достаточное условие хаотичности в таком бильярде можно записать в виде

$$\frac{l}{2R} = \frac{4bl}{a^2} > 1. \quad (2.1)$$

Введем динамические переменные, как показано на рисунке 4. Положительным направлением для углов  $\varphi_n$  и  $\alpha_n^*$  примем направление против часовой стрелки, а для угла  $\alpha_n$  — по часовой. Если граница бильярда неподвижна, то угол падения  $\alpha_n^*$  равен углу отражения  $\alpha_n$ . Пусть  $V_n$  — скорость частицы, а  $t_n$  — время  $n$ -го столкновения с границей. Для построения отображения, описывающего динамику частицы в таком бильярде, необходимо рассмотреть два случая: либо после очередного столкновения с фокусирующей компонентой частица сталкивается с ней же (парные столкновения), либо следующее столкновение происходит с другой фокусирующей компонентой.

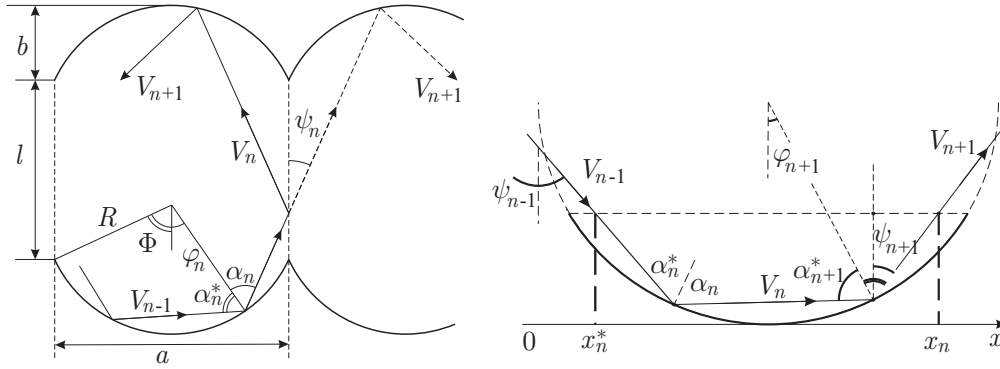


Рис. 4. Динамические переменные в бильярде типа стадион.

В случае парных столкновений геометрический анализ [27] приводит к отображению вида

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}^* &= \alpha_n, & \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^*, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi}, \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{2R \cos \alpha_n}{V_n}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Если  $|\varphi_{n+1}| < \Phi$ , то частица продолжает каскад столкновений с одной границей. В противном случае  $(n+1)$ -е столкновение произойдет с другой фокусирующей компонентой. При переходе от одной фокусирующей компоненты к другой отображение запишется как

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}^* &= \arcsin \left[ \sin(\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}^*}{R} \cos \psi_n \right], \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^*, \\ \varphi_{n+1} &= \psi_n - \alpha_{n+1}^*, \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{R(\cos \varphi_n + \cos \varphi_{n+1} - 2 \cos \Phi) + l}{V_n \cos \psi_n},\end{aligned}\quad (2.3)$$

где  $\psi_n = \alpha_n - \varphi_n$ ,  $x_n = [\sin \alpha_n + \sin(\Phi - \psi_n)] R / \cos \psi_n$ ,  $x_{n+1}^* = x_n + l \operatorname{tg} \psi_n \pmod{a}$ .

На рис. 5 а, б в координатах  $(\psi, \xi) = (\psi, \xi_n = 1/2 + (R \sin \varphi_n)/a)$  показан фазовый портрет бильярда типа стадион, заданный отображениями (2.2), (2.3). Оттенки серого цвета на этом рисунке соответствуют числу точек, попавших в данную область фазового пространства. Можно видеть, что когда кривизна фокусирующих компонент мала (рис. 5 а), фазовый портрет содержит устойчивые неподвижные точки, окруженные инвариантными кривыми. Динамика бильярдных частиц вблизи этих точек регулярна. Области, соответствующие различным резонансам, разделены сепаратрисами со стохастическими слоями. Ширина каждого из этих слоев зависит от степени нелинейности в системе. С ростом нелинейности неподвижные точки теряют устойчивость. В результате появляется глобальный хаос (рис. 5 б).

Чтобы провести аналитический анализ полученного бильярдного отображения, допустим, что кривизна фокусирующих компонент мала,  $l \gg a \gg b$ . В этом случае вероятность последовательных столкновений с одной и той же компонентой границы становится пренебрежимо малой, а дуги окружности можно аппроксимировать параболой. Такое прибли-

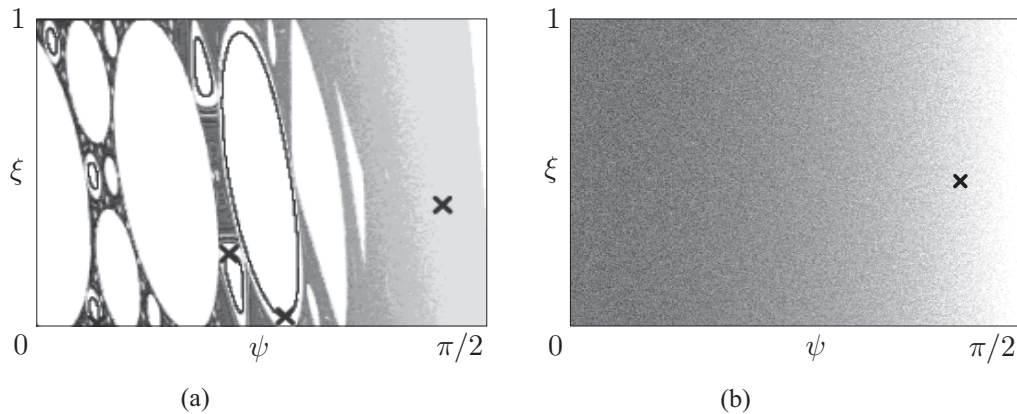


Рис. 5. Фазовый портрет бильярда типа стадион, заданного отображениями (2.2), (2.3) при  $a = 0.5$  и  $l = 1$ : (a) — система, близкая к интегрируемой,  $b = 0.01$ , (b) — глобальный хаос,  $b = 0.25$ .

жение означает, что частица будет сталкиваться (см. рис. 6) с границей в точке  $A$ , которая является проекцией точки  $B$  на фокусирующую компоненту, а не в точке  $C$ .

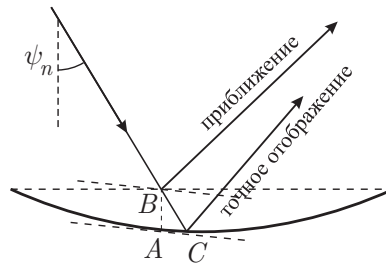


Рис. 6. Разница между траекториями бильярдных частиц в точном (2.2)–(2.3) и приближенном (2.4) отображениях.

При таких допущениях бильярдное отображение будет иметь очень простую форму:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + l \operatorname{tg} \psi_{n+1} \pmod{a}, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n - 2\beta(x_{n+1}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\beta(x) = \operatorname{arctg} \chi(x) \approx 4b(2x - a)/a^2$  — наклон касательной к фокусирующей компоненте в точке  $A$ . Теперь, вводя переменные  $\xi = x/a$ ,  $\xi \in [0, 1)$ , получим

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \xi_n + \frac{l}{a} \operatorname{tg} \psi_n \pmod{1}, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n - \frac{8b}{a}(2\xi_{n+1} - 1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

С одной стороны, данное упрощение ведет к некоторой недооценке угла отражения, если угол падения  $\psi_n$  достаточно большой. В результате фазовые траектории будут почти равномерно распределены по стохастическому слою, в то время как для точного отображения область  $\psi \approx \pi/2$  оказывается практически пустой (см. рис. 7 а и 5 а, соответственно). С другой стороны, когда угол  $\psi$  сравнительно мал, такой подход дает достаточно хорошее приближение истинной динамики частицы в окрестности семейства устойчивых неподвижных точек  $\{\xi = 1/2, \psi_m = \operatorname{arctg}(ma/l)\}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , которые расположены в центре больших

эллипсов (рис. 7 а), соответствующих наибольшим областям устойчивости. В конфигурационном пространстве данное семейство устойчивых точек отвечает траекториям частицы, показанным на рис. 7 б.

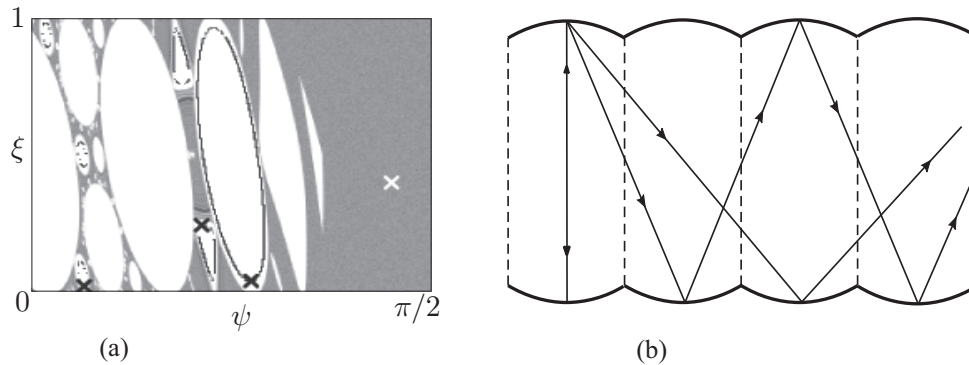


Рис. 7. (а) Фазовый портрет бильярдной системы (2.5) с параболическими компонентами границы при тех же значениях параметров, как на рис. 5 а. (б) Траектории бильярдного шара, соответствующие главному семейству неподвижных точек, расположенных в центрах больших эллипсов.

Исследуем устойчивость таких точек. Для этого линеаризуем отображение, сделав замену  $\xi_n = \Delta\xi_n + 1/2$ ,  $\psi_n = \Delta\psi_n + \arctg(na/l)$ . Тогда, раскладывая в ряд по  $\Delta\psi$ , найдем

$$\begin{aligned}\Delta\xi_{n+1} &= \Delta\xi_n + \frac{l}{a \cos^2 \psi_s} \Delta\psi_n + O(\Delta\psi_n^2), \\ \Delta\psi_{n+1} &= \Delta\psi_n - \frac{16b}{a} \Delta\xi_{n+1},\end{aligned}$$

где  $\psi_s = \arctg(sa/l)$ . При этом матрица преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{l}{a \cos^2 \psi_s} \\ -\frac{16b}{a} & 1 - \frac{16bl}{a^2 \cos^2 \psi_s} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что  $\det A = 1$ . Следовательно, полученное отображение сохраняет меру.

Значение угла  $\psi_{cr}$ , начиная с которого неподвижные точки теряют устойчивость, следует из условия  $|\text{Tr} A| > 2$ , т. е.

$$\left| 2 - \frac{16bl}{a^2 \cos^2 \psi} \right| > 2.$$

Поскольку второе слагаемое под знаком модуля не может быть отрицательным, то это неравенство будет удовлетворяться только при  $16bl/(a^2 \cos^2 \psi) > 4$ . Отсюда находим значение критического угла, начиная с которого неподвижные точки теряют устойчивость и в системе возникает хаос:  $\psi_{cr} = \arccos(2\sqrt{lb}/a)$ . Поскольку  $\text{tg} \psi = ma/l$ , то ограничение на возможное число устойчивых целых резонансов равно

$$m \leq \sqrt{\frac{l}{4b} - \frac{l^2}{a^2}}.$$

В частности, при  $b = 0.01$ ,  $a = 0.5$  и  $l = 1$  получим  $m = 4$ , т.е. число резонансов равно 5. Это соответствует результатам численного анализа (см. рис. 7 а). Разрушение всех резонансов и переход к хаосу произойдет при

$$\frac{4bl}{a^2} > 1.$$

Отметим, что это выражение совпадает с достаточным условием существования стохастичности (2.1), полученным (см. выше) из строгого анализа.

### 3. Бильярды с возмущаемыми границами

Учет движения границы является естественным обобщением бильярдных моделей. Такие модели играют важную роль в различных областях физики: оптики [62, 63], физики плазмы [64, 65], астрофизики [66, 67, 68], и других. Не так давно подобные идеи были использованы для объяснения ряда экспериментальных результатов, полученных в атомной физике [69].

Бильярды некоторых специальных конфигураций также применяются для изучения феномена ускорения Ферми (см. [21, 26, 28]). Их отличительная особенность в том, что при должной модификации такие системы могут быть использованы для некоторых экспериментальных исследований [70, 71, 72].

#### 3.1. Бильярд произвольной формы

Рассмотрим бильярд с произвольной границей. Известно, что в качестве канонических переменных можно выбрать пару  $(\theta_n, \alpha_n)$ , где  $\theta_n$  — угол между горизонталью и прямой, проведенной из некоторой точки  $O$  внутри бильярда к точке  $n$ -го столкновения, а  $\alpha_n$  — угол между внешней нормалью к поверхности в точке  $n$ -го соударения и скоростью частицы непосредственно перед соударением (см. рис. 8). Отображение, записанное в таких переменных, сохраняет фазовый объем  $d\tau = \cos \alpha \, d\alpha \, d\theta$ . Из чего, в частности, следует, что в случае эргодичности системы величина  $\alpha_n$  будет распределена по закону

$$\rho_\alpha(\alpha) = \frac{1}{2} \cos \alpha,$$

где  $1/2$  — нормировочный множитель.

Пусть границы бильярда осциллируют по некоторому закону. Если скорость движения границы в каждой точке направлена нормально к поверхности, то такие колебания мы будем называть нормальными. Если же вектор скорости в каждой точке параллелен определенной прямой — продольными. Для бильярда типа стадион первый случай соответствует сжатию и расширению фокусирующей компоненты, второй — изменению длины боковых стенок, так что фокусирующая компонента перемещается параллельно самой себе.

##### 3.1.1. Нормальные колебания

###### Абсолютно упругие столкновения

Пусть граница бильярда осциллирует по некоторому периодическому закону  $U(t) = U_0 f(\omega t)$ , причем скорость границы всегда направлена перпендикулярно поверхности.





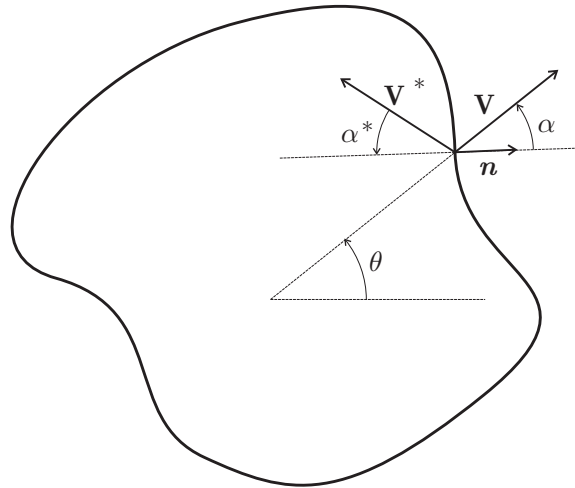


Рис. 8. Бильярд с границей произвольной формы.

Учитывая, что при столкновениях с границей меняется только нормальная компонента скорости, а тангенциальная остается без изменения, нетрудно получить отображение для скорости частицы:

$$V_{n+1} = \sqrt{V_n^2 + 4 \cos \alpha_n U_0 f(\omega t_n) + 4 U_0^2 f^2(\omega t_n)}.$$

Соотношение для момента времени, в который произойдет следующее столкновение, имеет вид

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\lambda_{n+1}}{V_{n+1}},$$

где  $\lambda_n$  — длина свободного пробега, которая, вообще говоря, является функцией  $\alpha_n$  и  $\theta_n$ . Для дальнейших вычислений удобно перейти к безразмерной скорости частицы  $v_n \equiv V_n/U_0$ , а время заменить на фазу колебания границы в момент столкновения  $\varphi_n = \omega t_n$ .

В этих переменных отображение, описывающее динамику частицы в произвольном бильярде, запишется как

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \sqrt{v_n^2 + 4 \cos \alpha_n f_n + 4 f_n^2}, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{v_{n+1}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где введена безразмерная длина свободного пробега  $\tilde{\lambda}_n = \omega \lambda_n / U_0$  и принято обозначение  $f_n \equiv f(\varphi_n)$ . В пределе больших скоростей частицы ( $v_n \gg 1$ ), раскладывая первое уравнение в ряд Тейлора, получим

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + 2 f_n \cos \alpha_n + \frac{4 f_n^2 \sin^2 \alpha_n}{v_n} + O\left(\frac{1}{v_n^2}\right), \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \frac{\tilde{\lambda}_{n+1}}{v_{n+1}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Данное отображение близко к известному отображению Улама и описывает изменение скорости в бильярде с хаотическим поведением. От отображения Улама его отличает наличие положительного слагаемого в соотношении для скорости, а также переменных  $\alpha_n$  и  $\tilde{\lambda}_{n+1}$ , которые не являются константами, а могут принимать значения из некоторого диапазона. В хаотических бильярдах эти переменные обладают всеми признаками случайных

величин. Если считать  $\alpha_n$  и  $\tilde{\lambda}_n$  случайными с известным распределением, то нетрудно приближенно оценить дисперсию изменения скорости.

Возводя в квадрат первое из уравнений отображения (3.1), получим отображение для безразмерной энергии частицы  $E \equiv v^2$ :

$$E_{n+1} = E_n + 4f_n \cos \alpha_n \sqrt{E_n} + 4f_n^2. \quad (3.3)$$

### Учет диссипации энергии

При столкновениях с границей в реальных физических системах удар не является абсолютно упругим и частица теряет часть своей энергии. В результате система приходит к равновесному состоянию. Многочисленные работы на эту тему были связаны с изучением процессов такого перехода. Как было показано, существуют системы, в которых разность между средней энергией частиц и ее равновесным значением убывает как  $\exp\left(-(t/\tau)^\beta\right)$ , где  $\beta < 1$ . При этом величина  $\beta$  уменьшается по мере увеличения стохастичности в системе. Для модели Ферми–Улама и близкой к ней модели бильярда в форме полустадиина подробные исследования можно найти в работах [73, 74].

Учет диссипации энергии представляет собой дальнейшее обобщение отображений, описывающих динамику частицы в хаотических бильярдах с пульсирующими границами. Пусть удар о стенку не является абсолютно упругим и при соударениях со стенкой частица теряет часть своей скорости, пропорциональную коэффициенту затухания  $\delta$ . Действуя аналогично предыдущему пункту, нетрудно получить отображение для скорости

$$v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 \sin^2 \alpha_n + ((1 - \delta) \cos \alpha_n + 2f_n)^2},$$

что в пределе больших скоростей и малого затухания имеет вид:

$$v_{n+1} = (1 - \delta \cos^2 \alpha_n) v_n + 2f_n \cos \alpha_n (1 - \delta \sin^2 \alpha_n) + \frac{f_n^2}{v_n} (2 \sin^2 \alpha) + O(\delta^2) + O\left(\frac{1}{v^2}\right).$$

Отображение для энергии частицы в случае малых затуханий имеет вид

$$E_{n+1} = (1 - \delta \cos^2 \alpha_n) E_n + 4f_n \cos \alpha_n (1 - \delta) \sqrt{E} + 4f_n^2.$$

### 3.1.2. Продольные колебания

Пусть вектор скорости движения границы бильярда образует угол  $\beta$  с нормалью к ней. Найдем, как будет меняться скорость частицы в этом случае.

Обозначим скорость частицы как  $\mathbf{V}$ , а угол между вектором скорости и вертикалью —  $\theta$  (см. рис. 9). Соответственно, проекции вектора скорости на координатные оси составят:  $V_x = V \sin \theta$ ,  $V_y = -V \cos \theta$ ,  $\operatorname{tg} \theta = -V_x/V_y$ . Будем считать, что граница бильярда движется вверх со скоростью  $U$ . Кроме того, дополнительно введем следующие обозначения. Переменные в системе отсчета, связанной с подвижной границей, будем обозначать штрихом ( $\mathbf{V}'$ ,  $\theta'$ ), а переменные после соударения — чертой сверху ( $\bar{\mathbf{V}}$ ,  $\bar{\theta}$ ).

Тогда в системе отсчета, связанной с границей, получим следующие значения переменных:

$$\begin{aligned} V'_x &= V_x = V \sin \theta, \\ V'_y &= V_y - U = -V \cos \theta - U, \\ \operatorname{tg} \theta' &= -\frac{V'_x}{V'_y} = \frac{V \sin \theta}{V \cos \theta + U}. \end{aligned}$$

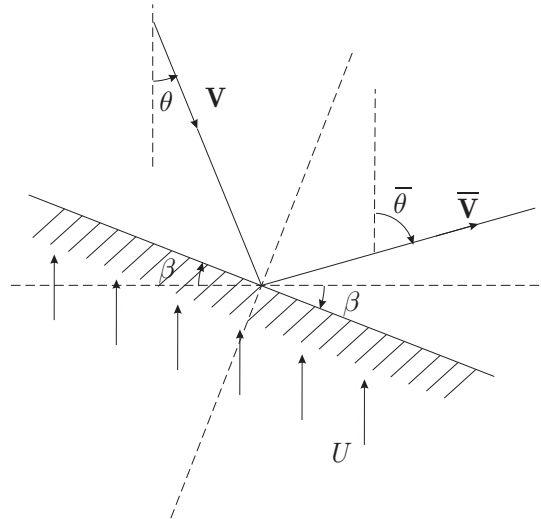


Рис. 9. Столкновение с границей, движущейся под углом к нормали.

Угол между вектором скорости и нормалью к поверхности равен  $\alpha = \theta' - \beta$ . Соударение с границей приведет к повороту вектора скорости на угол  $\pi - 2\alpha$ . Следовательно, отображение будет задаваться линейным преобразованием:

$$\bar{\mathbf{V}}' = \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \mathbf{V}' = A \mathbf{V}',$$

где  $A$  — матрица поворота. После соударения с границей угол между вектором скорости и вертикалью будет равен  $\bar{\theta}' = \alpha - \beta = \theta' - 2\beta$ . Соответственно, проекции вектора скорости на оси координат равны  $\bar{V}'_x = \bar{V}' \sin \bar{\theta}'$ ,  $\bar{V}'_y = \bar{V}' \cos \bar{\theta}'$ . Теперь, после перехода в неподвижную систему отсчета, получим  $\bar{V}_x = \bar{V}'_x$ ,  $\bar{V}_y = \bar{V}'_y + U$ ,  $\tan \theta = \bar{V}_x / \bar{V}_y$ .

Таким образом, общий вид отображения будет следующим:

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -V \sin \theta \\ V \cos \theta + U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\alpha = \arctg \left( \frac{V \sin \theta}{V \cos \theta + U} \right) - \beta.$$

### 3.2. Среднее изменение скорости в общем случае

В бильярде с возмущаемой границей от соударения к соударению величина скорости бильярдного шара меняется. Как показывают исследования, эти изменения носят случайный характер. Поэтому изучим вопрос о среднем изменении скорости в бильярдах произвольной формы.

Рассмотрим два последовательных столкновения шара со стенкой в бильярде произвольной конфигурации (рис. 10). Обозначим через  $\alpha_0$  угол падения частицы при первом соударении, а через  $\alpha_1$  — при втором. Кроме того, пусть  $V_0$  и  $V_1$  обозначают модули скоростей шара перед первым и перед вторым столкновениями соответственно. Для проекций скоростей используем следующие индексы: верхние индексы  $\tau$  и  $n$  обозначают тангенциальную и нормальную проекции, первый нижний индекс соответствует индексу скорости, второй полагается равным 1, если рассматриваются проекции перед столкновением, и 0, если после него.

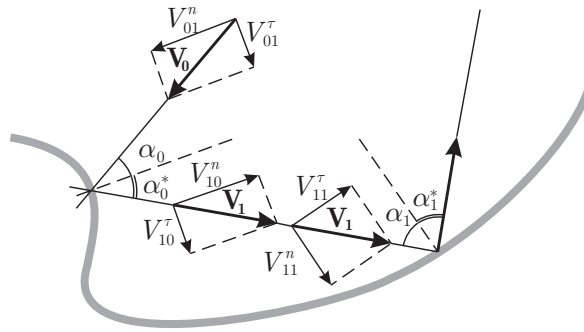


Рис. 10. Бильярд произвольной конфигурации.

Таким образом,  $V_{10}^\tau$  будет обозначать тангенциальную проекцию скорости  $V_1$  в точке первого столкновения, а  $V_{11}^\tau$  — тангенциальную проекцию в точке второго столкновения; в общем случае они не равны (см. рис. 10). Пусть  $U(t)$  — скорость движения границы. Очевидно, что должно выполняться соотношение

$$\langle U(t) \rangle_t = 0, \quad (3.5)$$

которое является следствием условия, что граница в среднем остается на месте.

Рассмотрим одно столкновение частицы со стенкой. Тангенциальная составляющая скорости при этом, очевидно, останется постоянной. Изменение же нормальной составляющей нетрудно найти, переходя в систему отсчета, связанную со стенкой. Таким образом, для первого столкновения можно записать

$$\begin{aligned} V_{10}^n &= -V_{01}^n + 2U(t_n) = -V_0 \cos \alpha_0 + 2U(t_n), \\ V_{10}^\tau &= V_{01}^\tau = V_0 \sin \alpha_0, \\ V_1 &= \sqrt{(V_0^n)^2 - 4V_{01}^n U(t_n) + 4U^2(t_n)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Очевидно, что если рассматривать только одно столкновение, то  $\langle \Delta V_{10}^\tau \rangle = 0$  и  $\langle \Delta V_{10}^n \rangle = 0$  для бильярда *любой* конфигурации. Поскольку, изменение скорости связано только с изменением ее нормальной компоненты, то средний прирост скорости будет зависеть от значения нормальной компоненты при следующем столкновении. Однако в общем случае можно говорить лишь о ее средней, т. е.

$$\langle V_{11}^n \rangle = \langle V_1 \cos \alpha_1 \rangle = \left\langle \sqrt{V_0^2 - 4V_0 U(t) \cos \alpha_0 + 4U^2(t_n)} \cos \alpha_1 \right\rangle,$$

где усреднение производится по углам  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  и времени  $t$ . Данное соотношение уместно проиллюстрировать двумя примерами.

### Модель Ферми–Улама

На расстоянии  $l$  друг от друга расположены две параллельные тяжелые стенки, между которыми движется шарик. Одна из стенок совершает периодические колебания с амплитудой  $a$ , такие, что  $l \gg a$ . Конкретная зависимость колебаний от времени для нашего анализа несущественна, важно лишь, чтобы скорость движения стенки удовлетворяла соотношению (3.5). Поскольку тангенциальная составляющая скорости в этой модели постоянна,  $V^\tau = \text{const}$ , то скорость и угол падения оказываются связанными соотношением

$$V \sin \alpha = V^\tau = \text{const}. \quad (3.7)$$

В свою очередь, нормальная проекция скорости после первого столкновения  $V_{10}^n$  и перед вторым  $V_{11}^n$  равны по модулю. Следовательно,

$$\langle V_{11}^n \rangle = \langle V_{10}^n \rangle = \langle -V_{01}^n + 2U(t_n) \rangle = V_{01}^n.$$

Таким образом, в среднем ускорения в этой модели нет. Конечно, если изменение скорости не ограничено инвариантными кривыми, то рост скорости будет происходить, но это будет следствием диффузии в пространстве скоростей.

### Газ Лоренца

Из-за сильных перемешивающих свойств можно считать, что углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  независимы друг от друга, а значит,

$$\langle V_{11}^n \rangle = \langle \cos \alpha_1 V_1 \rangle_{\alpha_0, \alpha_1, t} = \langle \cos \alpha_1 \rangle_{\alpha_1} \langle V_1 \rangle_{\alpha_0, t}.$$

Следовательно, колебания (увеличение и уменьшение) скорости при соударениях связаны с изменением ее модуля, а не с колебаниями нормальной проекции, как это имеет место в предыдущем случае. Как будет показано ниже, величина  $\langle V_n \rangle$  растет с увеличением числа  $n$ , и, таким образом, можно говорить о наличии ускорения Ферми в газе Лоренца.

По-видимому, это утверждение можно распространить и на другие системы, в которых между углом падения и скоростью нет такой однозначной связи (3.7), как в модели Ферми–Улама.

## 4. Газ Лоренца с осциллирующими рассеивателями

Для газа Лоренца с открытым и с ограниченным горизонтом средняя длина свободного пробега частицы определяется как

$$\lambda = \frac{\pi \Omega}{P}, \quad (4.1)$$

где  $\Omega$  — пространство движения частицы, т. е. пространство, не занятое рассеивателями,  $P$  — периметр рассеивателей. Для бесконечного горизонта из-за увеличения вероятности длинных перелетов изменяются статистические свойства и не сходится среднее значение  $\lambda$ .

Допустим, что рассеиватели газа Лоренца осциллируют с небольшой амплитудой около своего равновесного положения. С использованием динамического [21, 26] и термодинамического [31] подходов было показано, что ускорение Ферми присуще газу Лоренца с осциллирующими рассеивателями достаточно общей конфигурации. При этом средняя скорость частицы растет как

$$\frac{d}{dt} \langle v \rangle = \frac{U_0^2}{3\lambda}, \quad (4.2)$$

где  $U = U_0 \cos \alpha$  — скорость колебания рассеивателей, и фаза  $\alpha$  является равномерно распределенной.

Для дальнейшего исследования газа Лоренца с возмущаемыми границами упростим геометрию бильярда. Разобьем пространство, где движется частица, на совокупность отдельных ячеек, соединенных узкими коридорами. Тогда динамику бильярдной частицы можно описать как совокупность последовательных переходов (скачков) из одной ячейки в другую через соединяющий их коридор. Если коридор достаточно узкий, то движение частицы будет происходить в почти замкнутой области. Такая *дискретизация конфигурационного пространства* бильярда позволяет оценить вероятность перехода из ячейки в ячейку, найти среднюю длину траектории частицы в отдельной ячейке и аналитически получить коэффициент диффузии.

#### 4.1. Динамика газа Лоренца в дискретном пространстве

Метод вычисления вероятности выхода частицы из почти замкнутой области бильярда развит в работе [75]. Условием применимости этого подхода является достаточно малый размер коридора (отверстия)  $l_0$  по сравнению с периметром рассеивателей в ячейке. Тогда время корреляции начальных условий  $\tau_c$  (т.е. время релаксации к некоторому квазиравновесному распределению  $w(r)$  внутри ячейки) будет достаточно мало по сравнению со средним временем выхода  $\tau = p^{-1}$ . Иными словами, выполняется соотношение

$$\tau \gg \tau_c. \quad (4.3)$$

Мы предполагаем, что распределения по скоростям и координатам являются независимыми, причем скалярное значение скорости  $v$  не является случайной величиной, а в среднем определяется ускорением Ферми. Тогда движение будет происходить в трехмерном фазовом пространстве с координатами  $q_1, q_2$  и  $\phi$ , где  $\phi \in [0, 2\pi]$  — угол, задающий распределение скорости.

Распределение вероятностей в соответствующем движении фазовом пространстве будет однородным, т.е.

$$w(q_1, q_2, \phi) = w = (2\pi\Omega)^{-1}.$$

Согласно [75], вероятность выхода (или перехода в соседнюю ячейку) можно записать как

$$p = 2l_0vw = \frac{l_0v}{\pi\Omega}. \quad (4.4)$$

В случае постоянной скорости эта вероятность является постоянной и задает экспоненциальное распределение вероятностей для времени выхода:

$$w(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (4.5)$$

Также при постоянной скорости можно определить среднюю длину траектории до выхода из ячейки

$$L = v\tau = v/p = \frac{\pi\Omega}{l_0}, \quad (4.6)$$

которому тоже соответствует экспоненциальное распределение:

$$w(l) = \frac{1}{L} \exp\left(-\frac{l}{L}\right). \quad (4.7)$$

При этом выражения (4.6) и (4.7) не зависят от скорости и могут применяться и в случае переменной скорости.

##### 4.1.1. Коэффициент диффузии

Для газа Лоренца два последовательных свободных пробега являются коррелированными, точнее, антикоррелированными. Например, после пробега слева направо пробег справа налево более вероятен. Кроме того, диффузия прекращается, т.е. коэффициент диффузии стремится к нулю при переходе от газа Лоренца с открытым горизонтом к системе с ограниченным горизонтом. Это происходит, когда расстояние между соседними рассеивателями стремится к нулю, так что становится невозможным переход из ячейки в ячейку.



Отсюда, в частности, следует, что применять стандартное определение диффузии через скорость и длину свободного пробега  $\lambda$

$$B = \left\langle \frac{\Delta x^2}{\tau} \right\rangle = \frac{\lambda_x^2}{\tau} = \frac{\lambda^2}{2\tau} = \frac{\lambda v}{2}$$

будет некорректно. Однако, поскольку мы используем упрощенную геометрию газа Лоренца, можно предложить подход, где в качестве длины свободного пробега берется размер ячейки, а в качестве скорости частицы — скорость переходов между ячейками. При этом само определение коэффициента диффузии остается прежним.

В работе [76] предложен метод описания диффузии частицы как набора дискретных переходов из одной ячейки в другую в случае медленной диффузии. В этом случае, хотя в силу ускорения Ферми вероятность  $p$  таких переходов зависит от времени, связь с коэффициентом диффузии  $D$  вдоль одного из выбранных направлений (например, оси  $X$ ) остается прежней:

$$D = \frac{\langle l_x^2 \rangle p}{2}, \quad (4.8)$$

где  $\langle l_x^2 \rangle \sim a^2$  — средний квадрат смещения вдоль оси  $X$ , зависящий от типа геометрической структуры решетки.

Теперь, учитывая, что  $v = U_0^2 t / (3\lambda)$  (см. (4.2)) и используя соотношения (4.1) и (4.4), приходим к выражению для коэффициента диффузии, который оказывается пропорциональным времени:

$$D = \frac{\langle l_x^2 \rangle l_0 U_0^2 P}{6\pi^2 \Omega^2} t. \quad (4.9)$$

Следовательно, вдоль оси  $X$  диффузионный процесс ускоряется:

$$\langle x^2 \rangle = Dt \sim t^2.$$

Иными словами, имеет место супердиффузия. Механизм возникновения такой аномальной диффузии отличен от классического, основанного на скачках Леви, и объясняется, согласно термодинамической интерпретации ускорения Ферми, как повышение эффективной температуры частицы. Эта температура определяется через среднюю кинетическую энергию частицы, которая, как известно, в газе Лоренца движется стохастически. Постоянный рост этой температуры и, соответственно, коэффициента диффузии, вызван контактом с термостатом бесконечной температуры. В этом проявляется некоторое сходство со скачками Леви. В обоих случаях причиной отклонения от нормального диффузионного закона является источник бесконечной энергии. Эта бесконечность не лишает предложенную модель физического смысла и может пониматься просто как величина много большая, чем характерные параметры задачи.

#### 4.1.2. Газ Лоренца на треугольной и квадратной решетках

Для треугольной решетки (рис. 1 а) ограниченному горизонту газа Лоренца соответствует соотношение  $R \geq a/\sqrt{3}$ , а открытому горизонту — неравенство  $a/2 \leq R < a/\sqrt{3}$ . Таким образом, параметр  $a$  задает пространственный масштаб газа Лоренца. При этом очевидно, что коэффициент диффузии стремится к нулю, если  $R \rightarrow a/\sqrt{3}$ . В этом случае область движения внутри одной ячейки определится как

$$\Omega = \frac{a^2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi R^2}{2},$$

а суммарная эффективная ширина всех трех коридоров составит

$$l_0 = 3 \left( \frac{2a}{\sqrt{3}} - 2R \right).$$

При переходе из ячейки в ячейку по треугольной решетке длина перехода всегда одна и та же,  $l = 2a/3$ . Поскольку вероятность того, что переход произойдет в направлении оси  $X$  (влево или вправо), равна  $2/3$ , то проекция длины скачка на эту ось составляет  $a/\sqrt{3}$ , а средний квадрат проекции такого перехода вдоль оси  $X$  определяется как  $\langle l_x^2 \rangle = 2a^2/9$ . Тогда, используя соотношение (4.9), получим коэффициент диффузии для треугольной решетки:

$$D_{\triangle} = \frac{8a^2 U_0^2 R (a - \sqrt{3}R)}{3\sqrt{3}\pi (2a^2 - \sqrt{3}\pi R^2)^2} t. \quad (4.10)$$

Поскольку вероятность того, что переход произойдет в направлении вертикальной оси  $Y$ , равна  $1/3$ , то проекция длины скачка на эту ось  $l = 2a/3$ . Если переход произойдет в боковые коридоры (влево или вправо), то вероятность равна  $2/3$ , и проекция длины скачка на ось  $Y$  составит  $a/3$ . Поэтому средний квадрат проекции такого перехода вдоль оси  $Y$  определяется как  $\langle l_y^2 \rangle = 2a^2/9$ . Таким образом, коэффициент диффузии в вертикальном направлении совпадает с выражением (4.10).

Для квадратной решетки, чтобы получить газ Лоренца с открытым (а не бесконечным) горизонтом, в конфигурационное пространство бильярда необходимо ввести дополнительные рассеиватели меньшего радиуса  $r$  (см. рис. 1 б). Тогда бильярд с ограниченным горизонтом будет задаваться соотношением  $2R \geq a$  (или  $2r \geq a\sqrt{2} - 2R$ ) и  $R > a/(2\sqrt{2})$ , а бильярд с открытым горизонтом определится как  $a - 2R < 2r < a\sqrt{2} - 2R$ . Для бесконечного горизонта  $2r \leq a - 2R$  или  $R < a/(2\sqrt{2})$ .

Площадь области движения частицы для данного случая можно записать в виде

$$\Omega = a^2 - \pi R^2 - \pi r^2,$$

а периметр рассеивателей — как  $P = 2\pi R + 2\pi r$ . При этом суммарная ширина четырех коридоров составит  $l_0 = 4(a - 2R)$ .

Аналогично предыдущему, нетрудно определить коэффициент диффузии через средний квадрат проекции перехода вдоль оси  $X$ , который можно записать как  $\langle l_x^2 \rangle = a^2/2$ . Тогда

$$D_{\square} = \frac{2a^2 U_0^2 (R + r)(a - 2R)}{3\pi (a^2 - \pi R^2 - \pi r^2)^2} t.$$

Очевидно, вдоль вертикальной оси выражение для диффузии останется таким же.

## 4.2. Численный анализ

Новым в представленном исследовании диффузии в бильярдах с подвижными стенками является только метод описания переходов из одной ячейки в другую. Сам эффект ускорения Ферми хорошо изучен, в том числе и с помощью компьютерного анализа. Диффузия на решетках также давно известна. Поэтому мы сосредоточили свое внимание на рассмотрении процессов выхода из ячейки.



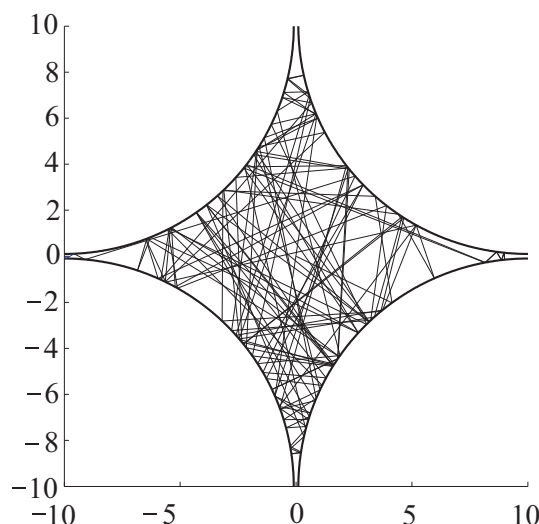


Рис. 11. Траектория частицы до выхода из ячейки квадратной решетки.

Численно исследовалось движение частицы в одной ячейке размером  $a = 20$  квадратной решетки с неподвижными границами. Радиус рассеивателей выбирался исходя из требуемых размеров отверстия. Частный случай траектории бильярдной частицы представлен на рисунке 11. Мы пренебрегали влиянием дополнительных рассеивателей, считая  $r = 0$ . Рассчитывалась средняя длина траектории частицы  $L_{exp}$  до выхода из ячейки при различных радиусах рассеивателей  $R$  и, соответственно, различных отверстиях  $l_0$  (ширина коридора), через которые возможен переход в соседнюю ячейку. Усреднение производилось по тысяче испытаний. Реализации отличались начальными направлениями скорости частицы, которые выбирались случайным образом.

Таблица 1. Средняя длина траектории как функция размеров отверстия

размер одного отверстия	$L_{exp}$	$L$
0.1	360	360
0.2	190	190
0.3	130	140
0.4	100	110
0.5	80	90

Полученные длины траекторий представлены в таблице 1. В этой же таблице приводятся теоретические значения  $L$ , рассчитанные по формуле (4.6). Как следует из выполненного анализа, при уменьшении отверстия наблюдается лучшее совпадение с теоретическими результатами, полученными в предположении малой вероятности выхода. Отметим, что мы рассчитывали длину траектории, а не время выхода, чтобы результат не зависел от скорости и его можно было применить в случае подвижных стенок при наличии ускорения Ферми.

Также был проверен экспоненциальный характер распределения длин траекторий до выхода частицы из ячейки. На рисунке 12 это распределение представлено в услов-

ных единицах для размера одного отверстия, равного 0.1. На этом рисунке серая ломаная отвечает численно полученному распределению, гладкая штрих-пунктирная кривая — распределению (4.7). Легко видеть, что численные результаты очень хорошо согласуются с аналитическими соотношениями, полученным выше.

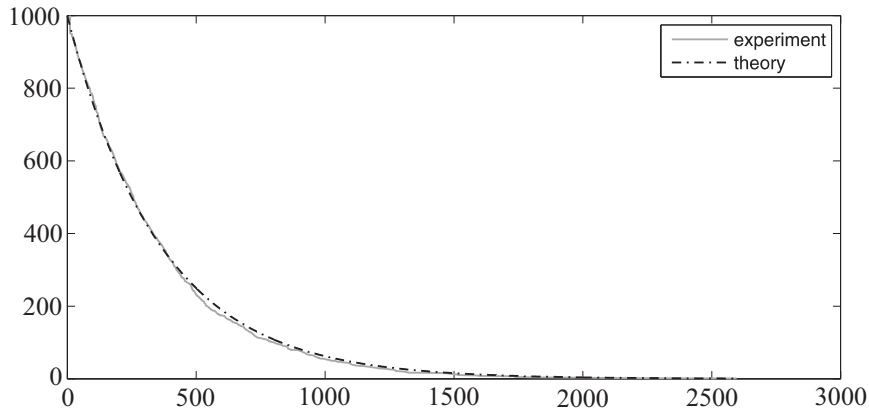


Рис. 12. Экспоненциальный характер распределения длин траекторий согласно компьютерному моделированию (серая ломаная линия) и теоретическим предсказаниям (4.7) (штриховая кривая).

Таким образом, диффузия в описанной модели газа Лоренца является аномальной, а именно супердиффузией. Вообще говоря, супердиффузия в газе Лоренца с осциллирующими рассеивателями может описываться с помощью стандартных формул аналогично нормальной диффузии в идеальном газе. При этом коэффициент диффузии будет линейно возрастать с течением времени в результате ускорения Ферми. Метод, предложенный в настоящем разделе (дискретизация газа Лоренца и анализ последовательности переходов из одной ячейки в другую), требует учета геометрических свойств решетки. При этом оказывается, что такой учет возможен без привлечения сложных формальных построений, а полученные результаты хорошо согласуются с результатами прямого численного моделирования.

## 5. Динамика частиц в фокусирующих бильярдах

Обычно для описания бильярдов с возмущаемыми во времени границами используется три различных подхода: приближение неподвижной границы, приближение прыгающей (hopping) границы и точная модель. Каждый из этих подходов является достаточно эффективным методом анализа динамики бильярдных частиц. Однако, как известно, некоторые приближения могут привести к систематической недооценке явлений и даже к неверным результатам. Поэтому в данном разделе приводятся исследования *точной* модели бильярда типа стадион (рис. 3).

В ряде работ точные модели уже рассматривались в общем виде [77], на примере эллиптических бильярдов [78], для системы Ферми–Улама [17] и др.

Допустим, что фокусирующие компоненты бильярда возмущаются так, что их скорость в каждой точке одинакова по величине и направлена перпендикулярно к ним. Предположим, что граница осциллирует по периодическому закону:  $R = R_0 + r_0 f(\omega t + \eta)$ , где  $\omega$  — частота, а  $\eta$  — фаза колебаний. Таким образом, скорость границы определится как  $U(t) = \dot{R}$ .

В нашей модели бильярда изменение радиуса фокусирующих компонент приводит также к изменению длины нейтральной компоненты  $l$ . Кроме того, всегда должно выполняться условие  $a \leq 2 \max R(t)$ , что эквивалентно  $a \leq R + \max r(t)$ . В этом случае классическая форма стадиона получится при минимальном радиусе фокусирующей компоненты. Для моделирования такой системы проще и надежнее использовать прямой итерационный метод молекулярной динамики. Однако для экономии машинного времени мы сначала рассчитывали время перелета частицы из окрестности одной фокусирующей компоненты в окрестность противоположной. Затем динамика частицы моделировалась прямыми итерациями на время  $\Delta t = \min\{r_0/V_n, 2\pi/\omega\}/N$ , где  $N \gg 1$ , которое выбиралось достаточно большим, чтобы снизить вероятность перелета границы, а  $r_0/V_n$  — время, за которое частица перелетит дугу. На конечном этапе момент столкновения частицы с границей определялся методом Ньютона. При этом, однако, надо помнить, что если скорость частицы мала, а шаг достаточно большой, то таких столкновений может быть несколько (при осциллирующей границе). Чтобы этого избежать, использовались достаточно малые шаги итерирования.

Численно было изучено два качественно различных случая: классический стадион (рис. 3а), обладающий глобальной стохастичностью и бильярд, близкий к прямоугольнику (рис. 3б), в котором фокусирующие компоненты слегка изогнуты. В таком бильярде динамика частицы описывается системой, близкой к интегрируемой.

### 5.1. Бильярд в форме классического стадиона

Для данного исследования были выбраны следующие параметры бильярда:  $l = 1$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 0.2$ ,  $r_0 = 0.01$ ,  $\omega = 1$  и начальная скорость частицы  $V_0 = 0.2$ . Соответствующий фазовый портрет представляет собой стохастическое море, т. е. в системе наблюдается глобальный хаос. Скорость бильярдной частицы рассчитывалась как среднее значение по ансамблю из 5 000 траекторий с различными начальными условиями в течение  $10^6$  итераций. При этом начальные условия выбирались на фокусирующей компоненте как случайные направления вектора скорости.

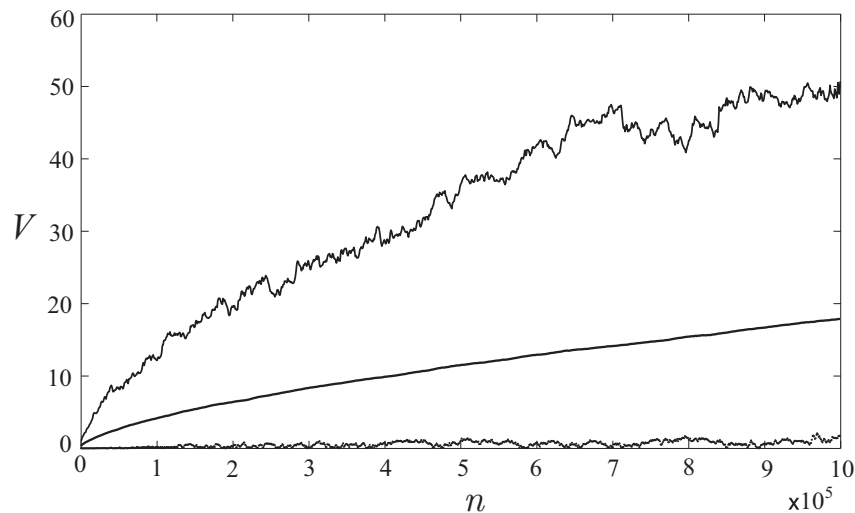


Рис. 13. Центральная кривая: средняя скорость  $V$  ансамбля из 5 000 частиц в классическом бильярде типа стадион, обладающем свойством глобального хаоса:  $l = 1$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 0.2$ ,  $r_0 = 0.01$ ,  $\omega = 1$  и  $V_0 = 0.2$ . Нижняя кривая и верхняя ломаная — наибольшая и наименьшая скорости в ансамбле соответственно.

Как следует из выполненного численного анализа (см. рис. 13, центральная кривая), рост скорости частицы носит корневой характер:  $V(n) \sim \sqrt{n}$ . Интересно, что аналогичная зависимость наблюдается и в газе Лоренца [21, 26]. На этом же рисунке представлены максимальная (верхняя ломаная линия) и минимальная (нижняя кривая, близкая к оси абсцисс) скорости частиц в ансамбле.

Как следует из рисунка, к моменту  $10^6$  столкновений с границей максимальная скорость бильярдной частицы достигает значения  $V_{\max} = 50.6$ . При этом минимальная скорость увеличивается с ростом  $n$ , так что  $V_{\min} = 2.1$ . В результате средняя скорость также растет и достигает величины  $V = 17.9$ .

Кроме приведенных, были исследованы около 10 000 других различных конфигураций параметров бильярда. Во всех случаях наблюдался рост скорости частиц, близкий к корневой зависимости от числа столкновений с границей. Таким образом, ускорение Ферми присуще бильярду типа стадион, если он обладает свойством глобального хаоса.

## 5.2. Стадион, близкий к прямоугольнику

Исследуем теперь близкий к интегрируемому случай  $b \ll a$ , когда кривизна фокусирующих компонент вносит только слабую нелинейность в систему. Для численных исследований бильярда данной геометрии были выбраны следующие параметры:  $a = 1$ ,  $b = 0.01$ ,  $l = 5$ ,  $r_0 = 0.01$ ,  $\omega = 1$ . В этой конфигурации фазовое пространство содержит области с регулярной и стохастической динамикой (см. рис. 5а).

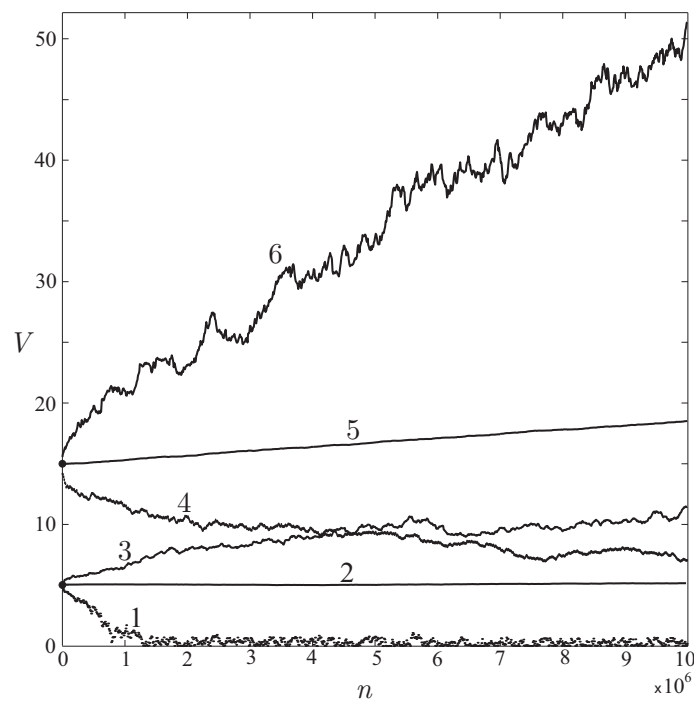


Рис. 14. Зависимость средней скорости  $V$  ансамбля из 1 000 частиц от числа столкновений  $n$  с границей для неавтономного бильярда, близкого к прямоугольнику ( $l = 5$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0.01$ ,  $r_0 = 0.01$ ,  $\omega = 1$ ). Начальные скорости  $V_0 = 5$  и  $V_0 = 15$ .

На основе усреднения по ансамблю из 1 000 частиц была получена зависимость их средней скорости от  $10^7$  столкновений (рис. 14). Траектории в ансамбле отличались друг



от друга случайным выбором направления вектора начальной скорости  $V_0$  в области стохастичности. Для каждого значения  $V_0$ , как и ранее, были построены три кривые, отвечающие минимальному (кривые 1 и 4), среднему (кривые 2 и 5) и максимальному (кривые 3 и 6) значениям в ансамбле. На рисунке 14 показаны зависимости  $V(n)$  для  $V_0 = 5$  и  $V_0 = 15$ .

Как следует из полученных зависимостей, в случае низких начальных скоростей в ансамбле существуют частицы, скорость которых (кривая 1) снижается до относительно малого значения  $V_{\min} \sim 10^{-2}$  и затем флуктуирует около него. Усредненная амплитуда этих флуктуаций составляет  $\sim 0.6$ . В то же время, имеются частицы с медленно возрастающими скоростями (кривая 3). Однако доля таких частиц в ансамбле относительно небольшая. В результате средняя скорость не увеличивается и остается почти постоянной в течение всего времени наблюдения.

Для относительно больших начальных скоростей (кривые 4–6), наблюдается качественно иное поведение ансамбля. Минимальная скорость, так же как и в предыдущем случае, уменьшается (кривая 4). Однако при этом максимальная скорость быстро растет (кривая 6). Как следствие, средняя скорость (кривая 5) тоже увеличивается, т. е. в этом случае наблюдается ускорение Ферми.

### 5.3. Разделение частиц по скоростям

Как показывают подробные исследования, в бильярдной системе, близкой к интегрируемой, существует некоторое критическое значение скорости. В зависимости от того, превышает начальная скорость частиц эту критическую величину или же она меньше ее, ансамбль бильярдных частиц либо ускоряется, либо его скорость остается практически постоянной. Иными словами, для точной модели наблюдается довольно необычное явление — разделение частиц по скоростям. Этот эффект можно рассматривать как своеобразное обобщение макроскопического демона Максвелла.

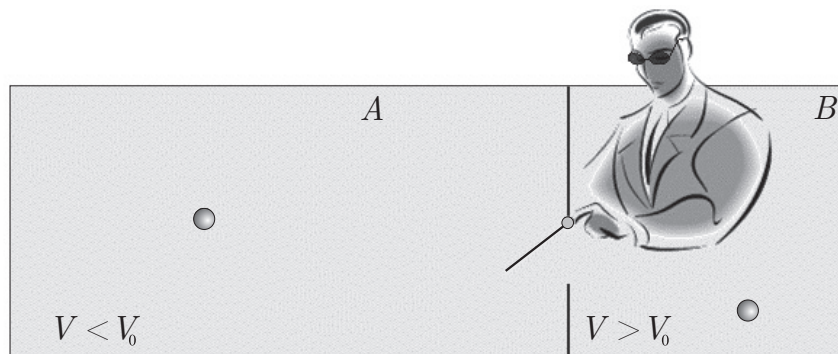


Рис. 15. Схема демона Максвелла.

В 1871 г. Дж. Максвелл предложил специфическое устройство (названное демоном), которое способно селектировать частицы разреженного газа по скоростям. Газ содержится в сосуде, разделенном на две камеры  $A$  и  $B$  перегородкой с небольшим отверстием, а демон располагается рядом с этим отверстием (рис. 15). Согласно второму началу термодинамики, при открытом отверстии частицы будут находиться в состоянии равновесия. Демон устроен так, что он может пропускать через отверстие быстрые частицы, летящие из  $A$  в  $B$ , и медленные, которые летят из  $B$  в  $A$ . Таким образом, вследствие разделения частиц по скоростям термодинамическое равновесие нарушается и возникает разность тем-

ператур между камерами. Иными словами, демон работает против закона термодинамики, приводящем две сообщающиеся системы в состояние равновесия.

Вообще говоря, в современном представлении демон Максвелла имеет несколько иную, более реалистическую интерпретацию (см. подробнее [37]), что дает возможность иначе подойти к рассмотрению этой проблемы. Основные публикации, касающиеся последних идей, собраны в книге [79].

Нетрудно видеть, что фокусирующие бильярды типа стадион с возмущаемыми границами в некотором смысле можно интерпретировать как динамическую реализацию демона Максвелла. Однако разделение частиц в бильярде происходит вследствие работы тяжелых бильярдных стенок. В основе эффекта разделения, по-видимому, лежит свойство захвата (залипания), когда траектория, попав в малую окрестность КАМ-островков, остается там весьма продолжительное время (см. п. 2.3). Поэтому отсутствие разгона бильярдных частиц (см. линию 2 на рис. 14) может наблюдаться произвольно долгий, но все же конечный отрезок времени. Детальный механизм разделения частиц в бильярдах с возмущаемыми границами пока остается не выясненным до конца.

## 6. Заключительные замечания

Бильярды являются достаточно удобными моделями целого ряда физических систем. Например, многим динамическим задачам могут быть поставлены в соответствие уравнения траектории частицы в бильярдах заданной формы. Более того, большинство подходов к проблеме перемешивания в системах из многих частиц восходят к задачам бильярдного типа.

Естественным физическим обобщением бильярдных систем являются бильярды, границы которых не стационарны, а изменяются по какому-либо закону. Это достаточно новая область, открывающая перспективы в исследовании многих давно известных, но мало изученных проблем. Например, задача о динамике частицы в бильярде, граница которого со временем осциллирует, имеет прямое физическое приложение как модель неравновесной статистической механики. Кроме того, с новой стороны раскрывается проблема ускорения космических частиц до высоких энергий — ускорение Ферми. Начиная с классической работы Ферми [14], она до сих пор привлекает к себе внимание исследователей из самых различных областей физики.

Как показывает современный анализ, для бильярда с осциллирующими границами существенным оказываются его динамические свойства: если он проявляет хаотическую динамику, то возмущение границы приводит к неограниченному росту скорости частицы, т. е. такому бильярду будет присуще ускорение Ферми.

В настоящей работе исследовались свойства плоских бильярдных конфигураций с возмущаемыми границами. Для газа Лоренца было показано, что в результате ускорения Ферми в системе имеет место супердиффузия, т. е. средний квадрат смещения возрастает пропорционально времени в квадрате. Вместе с тем, для фокусирующих бильярдных, близких к интегрируемым, кривизна компонент границы которых вносит только слабую нелинейность в систему, возмущения границ приводят к возникновению нового интересного явления — разделению частиц по скоростям. В зависимости от значения начальной скорости в бильярдной системе происходит или их ускорение, или скорость частиц практически не изменяется в течение всего времени наблюдения. Это дает возможность посредством простых колебаний границ селективировать бильярдные частицы в ансамбле.

## Список литературы

- [1] Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. М.: ЛКИ, 2007. 240 с.
- [2] Hadamard J. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques // J. Math. Pures Appl., 1898, vol. 4, pp. 27–73.
- [3] Биркгоф Дж. Динамические системы. М.–Ижевск: Изд. дом «Удмуртский ун-т», 1999. 408 с.
- [4] Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики. М.–Л.: АН СССР, 1950. 207 с.
- [5] Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // УМН, 1970, т. 25, № 2, с. 141–192.
- [6] Бунимович Л. А. О бильярдах, близких к рассеивающим // Матем. сб., 1974, т. 94, № 1, с. 49–73.
- [7] Bunimovich L. A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Commun. Math. Phys., 1979, vol. 65, no. 3, pp. 295–312.
- [8] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers // Commun. Math. Phys., 1981, vol. 78, no. 4, pp. 479–497.
- [9] Tabachnikov S. Geometry and billiards. Providence, RI: AMS Press, 2005. 176 p.
- [10] Chernov N., Markarian R. Introduction to the ergodic theory of chaotic billiards. Rio de Janeiro: IMPA Press, 2003. 207 p.
- [11] Козлов В. В., Трещев Д. В. Бильярды: Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: МГУ, 1991. 168 с.
- [12] Kozlov V. V. Billiards, invariant measures, and equilibrium thermodynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2000, vol. 5, no. 2, pp. 129–138.
- [13] Козлов В. В. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. М.–Ижевск: РХД, 2002. 320 с.
- [14] Fermi E. On the origin of the cosmic radiation // Phys. Rev., 1949, vol. 75, no. 8, pp. 1169–1174.
- [15] Ulam S. M. On some statistical properties of dynamical systems // Proc. of the 4th Berkeley symp. on math. stat. and probability: Vol. 3 / J. Neyman (Ed.). California: California Univ. Press, 1961, pp. 315–320.
- [16] Brahic A. Numerical study of a simple dynamical system // Astron. Astrophys., 1971, vol. 12, no. 1, pp. 98–110.
- [17] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A., Cohen R. H. Fermi acceleration revisited // Phys. D, 1980, vol. 1, no. 3, pp. 291–305.
- [18] Пустыльников Л. Д. Существование инвариантных кривых для отображений, близких к вырожденным, и решение проблемы Ферми–Улама // Матем. сб., 1994, т. 185, № 6, с. 113–124.
- [19] Krüger T., Pustyl'nikov L. D., Troubetzkoy S. E. Acceleration of bouncing balls in external fields // Nonlinearity, 1995, vol. 8, no. 3, pp. 397–410.
- [20] Пустыльников Л. Д. Модели Пуанкаре, строгое обоснование второго начала термодинамики из механики и механизм ускорения Ферми // УМН, 1995, т. 50, № 1, с. 143–186.
- [21] Лоскутов А. Ю., Рябов А. Б., Акиншин Л. Г. Механизм ускорения Ферми в рассеивающих бильярдах с возмущаемыми границами // ЖЭТФ, 1999, т. 116, № 5, с. 1781–1797.
- [22] de Carvalho R. E., Souza F. C., Leonel E. D. Fermi acceleration on the annular billiard // Phys. Rev. E, 2006, vol. 73, no. 6, 066229, 10 p.
- [23] Livorati A. L., Ladeira D., Leonel E. D. Scaling investigation of Fermi acceleration on a dissipative bouncer model // Phys. Rev. E, 2008, vol. 78, no. 5, 056205, 12 p.

- [24] Lenz F., Diakonov F. K., Schmelcher P. Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard // Phys. Rev. Lett., 2008, vol. 100, no. 1, 014103, 4 p.
- [25] Lenz F., Petri C., Koch F. N. R., Schmelcher P. A fresh view on Fermi acceleration in driven two-dimensional billiards // Complex Phenomena in Nanoscale Systems / G. Casati, D. Matrasulov (Eds.). NATO Science for Peace and Security, Ser. B: Physics and Biophysics. Springer Science + Business Media B.V. 2009, pp. 209–214.
- [26] Loskutov A. Yu., Ryabov A. B., Akinshin L. G. Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries // J. Phys. A, 2000, vol. 33, no. 44, pp. 7973–7986.
- [27] Loskutov A., Ryabov A. Particle dynamics in time-dependent stadium-like billiards // J. Stat. Phys., 2002, vol. 108, nos. 5–6, pp. 995–1014.
- [28] de Carvalho R. E., de Souza F. C., Leonel E. D. Fermi acceleration on the annular billiard: A simplified version // J. Phys. A, 2006, vol. 39, no. 14, pp. 3561–3573.
- [29] Leonel E. D., Oliveira D. F. M., Loskutov A. Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard // Chaos, 2009, vol. 19, no. 3, 033142, 7 p.
- [30] Gelfreich V., Turaev D. Fermi acceleration in non-autonomous billiards // J. Phys. A, 2008, vol. 41, no. 21, 212003, 6 p.
- [31] Loskutov A., Chichigina O., Ryabov A. Thermodynamics of dispersing billiards with time-dependent boundaries // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2008, vol. 18, no. 9, pp. 2863–2869.
- [32] Karlis A. K., Papachristou P. K., Diakonov F. K. Fermi acceleration in the randomized driven Lorentz gas and the Fermi-Ulam model // Phys. Rev. E, 2007, vol. 76, no. 1, 016214, 17 p.
- [33] Shah K., Turaev D., Rom-Kedar V. Exponential energy growth in a Fermi accelerator // Phys. Rev. E, 2010, vol. 81, no. 5, 056205, 6 p.
- [34] Ryabov A. B., Loskutov A. Time-dependent focusing billiards and macroscopic realization of Maxwell's demon // J. Phys. A, 2010, vol. 43, no. 12, 125104, 15 p.
- [35] Zaslavsky G. M., Edelman M. Maxwell's demon as a dynamical model // Phys. Rev. E, 1997, vol. 56, no. 5, pp. 5310–5320.
- [36] Zaslavsky G. M., Edelman M. Fractional kinetics: From pseudochaotic dynamics to Maxwell's demon // Phys. D, 2004, vol. 193, nos. 1–4, pp. 128–147.
- [37] Заславский Г. М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.–Ижевск: РХД, 2010. 472 с.
- [38] Бунимович Л. А. Системы гиперболического типа с особенностями. // Динамические системы–2 / Я. Г. Синай (ред.). (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 2.) М.: ВИНТИ, 1985. С. 173–204.
- [39] Chernov N. Entropy, Lyapunov exponents and mean-free path for billiards // J. Stat. Phys., 1996, vol. 88, nos. 1–2, pp. 1–29.
- [40] Garrido P. L. Kolmogorov–Sinai entropy, Lyapunov exponents, and mean free time in billiard systems // J. Stat. Phys., 1996, vol. 88, nos. 3–4, pp. 807–824.
- [41] Бунимович Л. А., Синай Я. Г., Чернов Н. И. Статистические свойства двумерных гиперболических билиардов // УМН, 1991, т. 46, № 4, с. 43–92.
- [42] Бунимович Л. А. Об убывании корреляций в динамических системах с хаотическим поведением // ЖЭТФ, 1985, т. 89, № 4, с. 1452–1470.
- [43] Bleher P. M. Statistical properties of two-dimensional periodic Lorentz gas with infinite horizon // J. Stat. Phys., 1992, vol. 66, nos. 1–2, pp. 315–373.
- [44] Chernov N. I. Statistical properties of the periodic Lorentz gas: Multidimensional case // J. Stat. Phys., 1994, vol. 74, nos. 1–2, pp. 11–53.

- [45] Baldwin P. R. The billiard algorithm and KS entropy // J. Phys. A, 1991, vol. 24, no. 16, L941–L947.
- [46] Artuso R., Casati G., Guarneri I. Numerical experiments on billiards // J. Stat. Phys., 1996, vol. 83, no. 1–2, pp. 145–166.
- [47] Casati G., Comparin G., Guarneri I. Decay of correlations in certain hyperbolic systems // Phys. Rev. A, 1982, vol. 26, no. 1, pp. 717–719.
- [48] Machta J. Power law decay of correlations in billiard problems // J. Stat. Phys., 1983, vol. 32, no. 3, pp. 555–564;  
Machta J., Reinhold B. Decay of correlations in the regular Lorentz gas // J. Stat. Phys., 1986, vol. 42, nos. 5–6, pp. 949–959.
- [49] Bouchaud J.-P., Le Doussal P. Numerical study of a D-dimensional periodic Lorentz gas with universal properties // J. Stat. Phys., 1985, vol. 41, nos. 1–2, pp. 225–248.
- [50] Machta J., Zwanzig R. Diffusion in a periodic Lorentz gas // Phys. Rev. Lett., 1983, vol. 50, no. 50, p. 1959–1962.
- [51] Zacherl A., Geisel T., Nierwetberg J., Radons G. Power spectra for anomalous diffusion in the extended Sinai billiard // Phys. Lett. A, 1986, vol. 114, no. 6, pp. 317–321.
- [52] Bunimovich L. A. Conditions of stochasticity for two-dimensional billiards // Chaos, 1991, vol. 1, no. 2, pp. 187–193.
- [53] Бунимович Л. А. Об эргодических свойствах некоторых бильярдов // Функц. анализ и его прил., 1974, т. 8, № 3, с. 73–74.
- [54] Markarian R. New ergodic billiards: Exact results // Nonlinearity, 1993, vol. 6, no. 5, pp. 819–841.
- [55] Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Основы теории сложных систем. М.–Ижевск: РХД, 2007. 612 с.
- [56] Markus L., Meyer K. R. Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic. (Mem. Amer. Math. Soc., vol. 144.) Providence, RI: AMS, 1974. 52 p.
- [57] Лоскутов А. Ю. Динамический хаос. Системы классической механики // УФН, 2007, т. 177, № 9, с. 989–1015.
- [58] Bunimovich L. A. Relative volume of Kolmogorov-Arnold-Moser tori and uniform distribution, stickiness and nonstickiness in Hamiltonian systems // Nonlinearity, 2008, vol. 21, no. 2, T13–T17.
- [59] Chirikov B. V., Shepelyansky D. L. Correlation properties of dynamical chaos in Hamiltonian systems // Phys. D, 1984, vol. 13, no. 3, pp. 395–400.
- [60] Bunimovich L. A. Mushrooms and other billiards with divided phase space // Chaos, 2001, vol. 11, no. 4, pp. 802–808.
- [61] Altmann E. G., Motter A. E., Kantz H. Stickiness in mushroom billiards // Chaos, 2005, vol. 15, no. 3, 033105, 7 p.
- [62] Steane A., Szriftgiser P., Desbiolles P., Dalibard J. Phase modulation of atomic de Broglie waves // Phys. Rev. Lett., 1995, vol. 74, no. 25, pp. 4972–4975.
- [63] Saif F., Bialynicki-Birula I., Fortunato M., Schleich W. P. Fermi accelerator in atom optics // Phys. Rev. A, 1998, vol. 58, no. 6, pp. 4779–4783.
- [64] Milovanov A. V., Zelenyi L. M. «Strange» Fermi processes and power-law nonthermal tails from a self-consistent fractional kinetic equation // Phys. Rev. E, 2001, vol. 64, no. 5, 052101, 4 p.
- [65] Michalek G., Ostrowski M., Schlickeiser R. On the mean free path of Solar cosmic rays // Solar Phys., 1999, vol. 184, pp. 339–352.
- [66] Malkov M. A. Ion leakage from quasiparallel collisionless shocks: Implications for injection and shock dissipation // Phys. Rev. E, 1998, vol. 58, no. 4, pp. 4911–4928.



- [67] Kobayakawa K., Honda Y. S., Samura T. Acceleration by oblique shocks at supernova remnants and cosmic ray spectra around the knee region // *Phys. Rev. D*, 2002, vol. 66, no. 8, 083004, 11 p.
- [68] Veltri A., Carbone V. Radiative intermittent events during Fermi's stochastic acceleration // *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 92, no. 14, 143901, 4 p.
- [69] Lanzano G., De Filippo E., Mahboub D., Rothard H., Aiello S., Anzalone A., Cavallaro S., Elanique A., Geraci E., Geraci M., Giustolisi F., Pagano A., Politi G. Fast electron production at intermediate energies: Evidence for Fermi shuttle acceleration and for deviations from simple relativistic kinematics // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 83, no. 22, pp. 4518–4521.
- [70] Frischat S. D., Doron E. Dynamical tunneling in mixed systems // *Phys. Rev. E*, 1998, vol. 57, no. 2, pp. 1421–1443.
- [71] Dembowski C., Graff H.-D., Heine A., Hofferbert R., Rehfeld H., Richter A. First experimental evidence for chaos-assisted tunneling in a microwave annular billiard // *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 84, no. 5, pp. 867–870.
- [72] Hofferbert R., Alt H., Dembowski C., Graff H.-D., Harney H. L., Heine A., Rehfeld H., Richter A. Experimental investigations of chaos-assisted tunneling in a microwave annular billiard // *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, no. 4, 046201, 21 p.
- [73] Tsang K. Y., Ngai K. L. Dynamics of relaxing systems subjected to nonlinear interactions // *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, no. 1, R17–R20.
- [74] Tsang K. Y., Lieberman M. A. Analytical calculation of invariant distributions on strange attractors // *Phys. D*, 1984, vol. 11, nos. 1–2, pp. 147–166;  
Tsang K. J., Lieberman M. A. Invariant distribution on strange attractors in highly dissipative systems // *Phys. Lett. A*, 1984, vol. 103, no. 4, pp. 175–181.
- [75] Стратонович Р. Л. К чисто динамической теории самопроизвольного распада сложных молекул // *ЖЭТФ*, 1995, т. 108, № 4, с. 1328–1341.
- [76] Chichigina O. A., Schimansky-Geier L., Romanovsky Yu. M. Slow diffusion on the surface with equal potential wells // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2008, vol. 18, no. 9, pp. 2769–2774.
- [77] Koiller J., Markarian R., Kamphorst S. O., de Carvalho S. P. Time-dependent billiards // *Nonlinearity*, 1995, vol. 8, no. 6, p. 983–1003.
- [78] Koiller J., Markarian R., Kamphorst S. O., de Carvalho S. P. Static and time-dependent perturbations of the classical elliptical billiard // *J. Stat. Phys.*, 1996, vol. 83, nos. 1–2, pp. 127–143.
- [79] Maxwell's demon: Entropy, Information, Computing / H. S. Leff, A. F. Rex (Eds.) Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1990. 349 p.